Analyse complexe, Exercices n° 9 :

Notes et corrections

Arnaud Vanhaecke [0]

Dernière mise à jour : 22 mai 2023

`Cette petite note a pour but de donner une correction partielle ou total des exercices du TD.`

Fonctions elliptiques

Exercice 1. Formule d'addition

1. On renvoie au cours pour la convergence absolue. On sait que $\wp$ est une fonction paire. Ainsi, comme $\wp$ est paire, on a dans un voisinage de 0 le développement en série entière

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n},$$

qui est de rayon de convergence $\min\{|\omega|; \omega \in \Lambda,\ \omega \neq 0\}$. D'après la formule de Taylor, les a_{2n} sont définis par

$$f(z) \coloneqq \wp(z) - \frac{1}{z^2},\ a_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}.$$

On calcule alors

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n (n+1)! \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z-\omega)^{n+2}},$$

et donc

$$a_{2n} = \frac{(2n+1)!}{(2n)!} \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \omega^{-2(n+1)}.$$

2. Fixons w et posons

$$f(z) = \wp(z+w) + \wp(z) + \wp(w) - \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right]^2.$$

C'est une fonction elliptique de période Λ donc il suffit de montrer que son développement à l'ordre 1 en 0 est nul.

$$f(z) = \wp(z+w) + \frac{1}{z^2} + \wp(w) - \frac{1}{4}\left[\frac{-\frac{2}{z^3} - \wp'(w) + O(z)}{\frac{1}{z^2} - \wp(w) + O(z)}\right]^2 + O(z) = \wp(z+w) + \frac{1}{z^2} + \wp(w) - \frac{1}{z^2}(1 + z^2\wp(w) + O(z^3))^2 + O(z),$$

d'ou $f(z) = \wp(z+w) + \wp(w) - 2\wp(w) + O(z)$. Ainsi la fonction elliptique f n'a pas de pôle donc elle est constante et $f(0) = 2\wp(w) - 2\wp(w) = 0$. Ceci démontre la formule [1].

3. Dans la formule précédente on prend la limite lorsque $z \to w$. Comme

$$\wp'(z) - \wp'(w) = \wp''(w)(z-w) + O((z-w)^2)$$
$$\wp(z) - \wp(w) = \wp'(w)(z-w) + O((z-w)^2),$$

on obtient la formule voulue puisque

$$\lim_{z \to w}\left[\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right] = \frac{\wp''(w)}{\wp'(w)}.$$

4. Rappelons qu'on a l'équation différentielle algébrique $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ qui donne lorsqu'on la dérive et que l'on simplifie $2\wp'' = 12\wp^2 - g_2$. Ainsi

$$\wp(2w) = \frac{1}{4}\frac{(6\wp^2(w) - \frac{1}{2}g_2)^2 - 8\wp(w)(4\wp^3(w) - g_2\wp(w) - g_3}{4\wp^3(w) - g_2\wp(w) - g_3}.$$

De plus le numérateur s'écrit

$$\frac{1}{4}\left(\left(6\wp^2(w) - \frac{1}{2}g_2\right)^2 - 8\wp(w)(4\wp^3(w) - g_2\wp(w) - g_3\right) = \wp^4(w) + \frac{1}{2}\wp(w)g_2 + \frac{1}{16}g_2 + 2\wp(w)g_3 = \left(\wp^2(w) + \frac{1}{4}g_2\right)^2 + 2g_3\wp(w)$$

ce qui démontre la formule voulue.

---

0. *Page web et contacts* : `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/tdcan2023/tdcan.html` (tout commentaire est bienvenu.)
1. Il existe plusieurs façons de l'obtenir directement mais c'est plus difficile.

Exercice 2. Fonction sigma et zêta de Weierstrass

1. On reconnait un produit de Weierstrass canonique de genre 2. Il suffit donc de montrer

$$\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{|\omega|^3} < \infty.$$

Rappelons que dans le cours, pour montrer que les séries d'Eisenstein convergent absolument on a estimé que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{Card}\{\omega \in \Lambda \mid N \leqslant |\omega| \leqslant N+1\} = O(N)$ puisque le nombre de points du réseau contenus dans une boule de rayon R est un $O(R^2)$. Ainsi

$$\sum_{N\leqslant|\omega|\leqslant N+1} = O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente.

2. On a

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \left[\frac{-1/\omega}{1-z/\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right],$$

donc en dérivant l'expression on obtient

$$\zeta(z) = -\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \left[\frac{-1}{(\omega-z)^2} + \frac{1}{\omega^2}\right] = -\wp(z).$$

3. Soit $\omega \in \Lambda$, comme $\sigma(z)$ et $\sigma(z+\omega)$ ont les mêmes zéros et qu'ils sont simples le quotient des deux fonctions, $\sigma(z+\omega)/\sigma(z)$ est une fonction entière qui ne s'annule pas donc elle est de la forme $e^{h(z)}$ où h est une fonction entière i.e.

$$\sigma(z+\omega) = e^{h(z)}\sigma(z).$$

Montrons que $h''(z) = 0$. La dérivée du logarithme de cette expression donne

$$h'(z) = \frac{\sigma'(z+\omega)}{\sigma(z+\omega)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z+\omega) - \zeta(z);$$

mais comme ζ' est elliptique on en déduit que $h'(z)$ est constante donc $h'' = 0$ ce qui conclut la preuve.

4. Considérons

$$f(z) = \frac{\prod_{j=1}^n \sigma(z-a_j)}{\prod_{j=1}^n \sigma(z-b_j)}.$$

Par définition f est une fonction méromorphe dont les pôles et les zéros modulo Λ sont respectivement les a_j et les b_j. De plus, cette fonction est elliptique pour Λ puisque pour $\omega \in \Lambda$ on obtient

$$f(z+\omega) = \frac{\prod_{j=1}^n e^{a(\omega)(z-a_j)+b(\omega)}\sigma(z-a_j)}{\prod_{j=1}^n e^{a(\omega)(z-b_j)+b(\omega)}\sigma(z-b_j)} = f(z);$$

on remarque en effet que l'hypothèse sur les a_j et les b_j le produit des exponentielles se compensent.

5. On a montré que ζ' était elliptique ce qui justifie que les η_i sont bien des constantes. On va appliquer la formule des résidus au parallélogramme fondamental P_ε de Ω décalé de $\varepsilon \in \mathbb{C}$ de sorte à ce qu'il contienne 0 en son intérieur. Comme ζ à un unique pôle simple dans P_ε on déduit de la formule des résidus

$$\int_{P_\varepsilon} \zeta(z)dz = 2i\pi.$$

On calcule maintenant l'intégrale en regroupant les cotés parallèles :

$$\int_{P_\varepsilon} \zeta(z)dz = \int_\varepsilon^{\omega_1+\varepsilon} \zeta(z)dz + \int_{\omega_1+\varepsilon}^{\omega_1+\omega_2+\varepsilon} \zeta(z)dz - \int_{\varepsilon+\omega_2}^{\omega_1+\omega_2+\varepsilon} \zeta(z)dz - \int_\varepsilon^{\varepsilon+\omega_2} \zeta(z)dz.$$

On obtient

$$\int_\varepsilon^{\omega_1+\varepsilon} \zeta(z)dz - \int_{\varepsilon+\omega_2}^{\omega_1+\omega_2+\varepsilon} \zeta(z)dz = \int_\varepsilon^{\omega_1+\varepsilon} (\zeta(z) - \zeta(z+\omega_2))dz = -\eta_2\omega_1$$

et de même
$$\int_{\omega_1+\varepsilon}^{\omega_1+\omega_2+\varepsilon} \zeta(z)dz - \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\omega_2} \zeta(z)dz = \eta_1\omega_2$$
Ainsi
$$\int_{P_\varepsilon} \zeta(z)dz = \eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2i\pi.$$

6. On voit que dans la première formule les deux termes sont des fonctions elliptiques pour Λ en z qui ont mêmes zéros (les $\pm a \mod \Lambda$) et les mêmes pôles. Il suffit de comparer le terme dominant mais puisque $z^2(\wp(z) - \wp(a)) \xrightarrow{z\to 0} 1$ mais aussi $\sigma(a) = -\sigma(-a)$ et $\sigma(z)/z \xrightarrow{z\to 0} 1$. Ces dernières formules s'obtiennent à partir de la définition de σ. Pour la seconde formule on divise la formule précédente par $(z-a)$ et on prend la limite $z \to a$ pour conclure.

Formes modulaires

Exercice 3. Formes et fonctions modulaires

1. C'est clair puisque S et T engendrent Γ et $S\cdot\tau = -1/\tau$, $T\cdot\tau = \tau+1$.
2. Si f est une forme modulaire de poids k impair on a pour $g = -\mathrm{id}$ que $f(\tau) = f(g\cdot\tau) = (-1)^k f(\tau) = -f(\tau)$ ce qui implique que f est nul.
3. Pour $k \geqslant 4$ un entier, la série d'Eisenstein de poids k s'écrit, en considérant le réseau $\Lambda_\tau = \tau\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ comme
$$G_k(\tau) = \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\\(c,d)\neq(0,0)}} (c\tau+d)^{-k}.$$
La convergence uniforme de cette série a été vue en cours. Soit $g = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in \Gamma$, on a alors
$$G_k(g\cdot\tau) = \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\\(c,d)\neq(0,0)}} \left(c\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} + d\right)^{-k} = (\gamma\tau+\delta)^k \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\\(c,d)\neq(0,0)}} ((c\alpha+d\gamma)\tau + (d\gamma+c\beta))^{-k}.$$
Ainsi
$$G_k(g\cdot\tau) = (\gamma\tau+\delta)^k \sum_{\substack{(c,d)\in g\cdot\mathbb{Z}^2\\(c,d)\neq(0,0)}} (c\tau+d)^{-k}.$$
Mais comme $g\in\Gamma$ elle induit une bijection $\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^2$ et donc cette dernière somme est la même somme sur $\mathbb{Z}^2$ donc $G_k(g\cdot\tau) = (\gamma\tau+\delta)^k G_k(\tau)$. Donc G_k est une forme modulaire de poids k et en particulier $G_k = 0$ si k est impair. Pour calculer la limite, la periodicité de G_k permet de se ramener à prendre la limite dans P. Comme G_k converge uniformément on peut considérer la limite terme à terme mais puisque
$$\lim_{\Im\tau\to\infty} (c\tau+d)^{-k} = 0 \ \text{ si } \neq 0$$
on a
$$\lim_{\Im\tau\to\infty} G_k(\tau) = \sum_{d\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} d^{-k} = 2\zeta(k).$$
4. Comme g_2 est de poids 4, g_2^3 est de poids 12 et comme g_3 est de poids 6, g_3^2 est de poids 12 aussi donc Δ est de poids 12. D'après la question précédente on a
$$\lim_{\Im\tau\to\infty} \Delta(\tau) = (120\zeta(4))^3 - 27(280\zeta(6))^2.$$
Or $\zeta(4) = \pi^4/90$ et $\zeta(6) = \pi^6/945$ où $90 = 2\cdot 3^2\cdot 5$ et $945 = 3^3\cdot 5\cdot 7$ ce qui donne finalement $(120\zeta(4))^3 - 27(280\zeta(6))^2 = 2^6\cdot 3^{-3}\pi^{12} - 2^6\cdot 3^{-3}\pi^{12} = 0$.
5. C'est le quotient d'une forme modulaire de poids 12 par une forme modulaire de poids 12, c'est donc une fonction modulaire ! D'après la question précédente, la limite est claire.
6. Par le théorème de l'application ouverte, $j(\mathbb{H})$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et on va montrer qu'il est fermé. Comme $\mathbb{C}$ est connexe on en déduira que $j(\mathbb{H}) = \mathbb{C}$. On considère une suite de points de $j(\mathbb{H})$ qui converge vers $b\in\mathbb{C}$: $j(\tau_n)\to b$ lorsque $n\to\infty$. On peut supposer que les τ_n sont contenus dans P. On distingue deux cas :

   S'il existe une constante C telle que $\Im\tau_n < C$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ on peut extraire une sous-suite convergente et supposer $\tau_n\to\tau$. La continuité de j assure alors que $j(\tau) = b$. Sinon on peut extraire une sous-suite dont la partie imaginaire tend vers $i\infty$ mais alors la suite des $j(\tau_n)$ n'est pas bornée en vertu de la limite calculée dans la question précédente, ce qui contredit la convergence. Ceci conclut la preuve.

Exercice 4. Formule $k/12$

1. L'invariance implique que si f est de poids negatif alors f admet des pôles.

2. Soit $f \not\equiv 0$ une forme modulaire méromorphe. Par hypothèse, il existe une constante $C > 0$ tel que f n'ait pas de pôle dans la région $\Im\tau > C$. Quitte à prendre C plus grand, on peut supposer que la région ne contienne pas de zéros puisque les zéros d'une fonction analytique ne peuvent pas s'accumuler en un point qui n'est pas une singularité essentielle si la fonction n'est pas identiquement nulle, par le principe des zéros isolés. Le domaine fondamental tronqué $\{\tau \in P \mid \Im\tau \leqslant C\}$ est compact donc il ne contient qu'un nombre fini de zéros et de pôles, ce qui conclut l'argument.

3. On pose $\rho = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et C tel que f n'ait pas de zéros dans la région $\Im\tau > C$. Pour simplifier, on supposera que f ne possède pas de zéros sur le contour que l'on va considérer. On considère un contour γ qui parcourt le bord de $\{\tau \in P \mid \Im\tau \leqslant C\}$ mais qui évite par un arc de cercle de rayon $\varepsilon > 0$ les points ρ, ρ^2 et i. On notera A, B, C, D les points non lisses de ce contour dans la partie $\Re\tau < 0$ où BC est l'arc de cercle autour de ρ et AB est le segment vertical ; puis A', B', C', D' les points miroirs dans la partie $\Re\tau > 0$. On prendra la limite $\varepsilon \to 0$ à la fin. Posons

$$g(\tau) := \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

D'après le théorème de Rouché, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)dz = \sum_{\substack{a \mod \Gamma \\ a \not\equiv i,\rho \mod \Gamma}} \mathrm{ord}_a(f),$$

et on va calculer cette intégrale différemment. Sur les segments verticaux, AB et $B'A'$, la périodicité de la fonction assure que les intégrales se compensent. On considère maintenant les arcs CD et $D'C'$ qui sont échangés par l'involution S. Puisque $f(-1/z) = z^k f(z)$ on en déduit que $f'(-1/z)z^{-2} = z^k f'(z) + kz^{k-1}f(z)$ et donc

$$g(-1/z) = z^2 g(z) + kz.$$

Fixons une paramétrisation $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ de l'arc de cercle CD. Alors $\widetilde{\beta}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ défini par $\widetilde{\beta}(t) := -\beta(t)^{-1}$ paramètre l'arc de cercle $C'D'$. On calcule

$$\int_C^D g(z)dz = \int_0^1 g(\beta(t))\beta'(t)dt,$$

$$\int_{D'}^{C'} g(z)dz = -\int_0^1 g(\widetilde{\beta}(t))\widetilde{\beta}'(t)dt = -\int_0^1 g(\beta(t))\beta'(t)dt - k\int_0^1 \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}dt.$$

Ainsi

$$\frac{1}{2i\pi}\left[\int_C^D g(z)dz + \int_{D'}^{C'} g(z)dz\right] = -\frac{k}{2i\pi}(\log D - \log C).$$

À la limite $\varepsilon \to 0$ ceci vaut $-\frac{k}{2i\pi}(\log i - \log(\rho^2)) = \frac{k}{12}$. Pour le segment horizontal AA' on développe g, qui est 1-périodique, en série de Fourier : $g(z) = \sum_n a_n e^{2i\pi nz}$. Cette série de Fourier est donnée par $fg = f'$ et donc $a_0 = 2i\pi\mathrm{ord}_{i\infty}(f)$. Ainsi

$$\int_A^{A'} g(z)dz = 2i\pi\mathrm{ord}_{i\infty}(f).$$

On passe à l'arc de cercle BC. On développe g en série entière au voisinage de $z = \rho^2$,

$$g(z) = b_{-1}(z+\bar{\rho})^{-1} + b_0 + b_1(z+\bar{\rho}) + O((z+\bar{\rho})^2), \text{ où } b_{-1} = \mathrm{ord}_{\rho^2}(f).$$

À la limite $\varepsilon \to 0$, l'intégrale de la fonction $z \mapsto g(z) - b_{-1}(z+\bar{\rho})^{-1}$ est nulle et puisque pour un arc de cercle δ de longueur α centré en $a \in \mathbb{C}$ on a

$$\int_\delta \frac{dz}{z-a} = i\alpha$$

on obtient

$$\frac{1}{2i\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_B^C g(z)dz = -\frac{1}{6}\mathrm{ord}_{\rho^2}(f) = -\frac{1}{6}\mathrm{ord}_\rho(f).$$

De manière analogue on obtient

$$\frac{1}{2i\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C'}^{B'} g(z)dz = -\frac{1}{6}\mathrm{ord}_\rho(f)$$

et

$$\frac{1}{2i\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D}^{D'} g(z)dz = -\frac{1}{2}\mathrm{ord}_i(f).$$

Ceci conclut la preuve de la formule. Dans le cas où on aurait des zéros sur le contour, il suffit de les éviter par l'extérieur du domaine dans la partie $\Re\tau \leqslant 0$ puis par l'intérieur dans la partie $\Re\tau \geqslant 0$.

4. Soit f une forme modulaire de poids 0, alors $f - f(i)$ est une forme modulaire de poids 0 qui s'annule en i ce qui d'après la formule $k/12$ implique que f est identiquement nulle.

5. Si f est une forme modulaire qui ne s'annule pas alors $1/f$ est une forme modulaire de poids négatif ce qui n'est pas possible.

6. Soit $f \not\equiv 0$ une forme modulaire de poids k et si $a \in \mathbb{H} \cup \{i\infty\}$ est un zéro de f alors la formule $k/12$ implique que

$$\frac{k}{12} \geqslant \frac{\mathrm{ord}_a(f)}{e(a)} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Ceci implique qu'il n'y a pas de forme modulaire de poids 2.

7. C'est une conséquence immédiate de la formule $k/12$ puisque pour une forme modulaire de poids 4 on a $k/12 = 1/3$. On en déduit que G_4 est l'unique forme modulaire de poids 4, à un scalaire près.

8. C'est une conséquence immédiate de la formule $k/12$ puisque pour une forme modulaire de poids 6 on a $k/12 = 1/2$. On en déduit que G_6 est l'unique forme modulaire de poids 6, à un scalaire près.

9. C'est immédiat puisque, modulo Γ, le seul zéro de G_4^3 est d'ordre 3 en ρ et le seul zéro de G_6^2 est d'ordre 2 en i. Ceci montre que $\Delta \not\equiv 0$. On obtient aussi que Δ est a un unique zéro simple en $i\infty$.

10. On a déjà montré la surjectivité, il suffit de montrer l'injectivité. Montrons que pour $b \in \mathbb{C}$, la fonction $z \mapsto f(z) := j(z) - b$ a un unique zéro modulo Γ. On a déjà obtenu que $\mathrm{ord}_{i\infty}(f) = \mathrm{ord}_{i\infty}(j) = -1$ et donc la formule $k/12$ nous assure que f a un unique zéro dans $\mathbb{H}$. On en déduit que pour tout nombre complexe $j_0 \in \mathbb{C}$, il existe une unique classe d'équivalence de réseau de j invariant j_0.

11. Soit f une fonction modulaire. Pour tout $w \in \mathbb{C}$ il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ modulo Γ tel que $j(z) = w$ donc la fonction

$$R\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\},\ R(w) := f(z),$$

est bien définie. Soit $a \in \mathbb{H}$ un point où j' ne s'annule pas et tel que $f(a)$ est défini. Alors, le théorème des fonctions inverses assure que R est analytique au voisinage de $j(a)$. Ainsi, R est analytique en dehors d'un nombre fini de points ; à l'aide du théorème de Casorati-Weierstrass on va montrer que R est méromorphe en ces points i.e. R ne possède pas de singularité essentielle en ces points (incluant l'∞). Soit $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ l'un de ces points et $b \in \mathbb{H} \cup \{i\infty\}$ un représentant. Si $a \neq \infty$ on choisit un voisinage $V(b)$ de b dans $\mathbb{H}$ et sinon on pose $V(b) = \{\tau \in \mathbb{H} \mid \Im\tau > C\} \cup \{i\infty\}$ pour $C > 0$ assez grand. Alors $f(V(b))$ n'est pas dense dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. L'image de $V(b)$ est un voisinage $U(a)$ de a dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Par définition $R(V(b)) = f(U(a))$. Donc d'après Casorati-Weierstrass, les points considérés ne sont pas des singularités essentielles, puisque l'image d'un voisinage ouvert de ces points n'est pas dense. Donc R est une fonction méromorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et donc c'est une fonction rationnelle. Ceci conclut la preuve.

Exercice 5. L'algèbre de formes modulaires

1. Soit $g \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$ une forme modulaire de poids k qui n'est pas une forme parabolique et soit $g \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$. Alors

$$h := f - \frac{f(i\infty)}{g(i\infty)} g$$

est une forme parabolique et $f = h + Cg$ avec $C \in \mathbb{C}$.

2. L'application considérée est bien injective, puisque Δ n'est pas nul. Inversement si $g \in \mathcal{S}_k(\Gamma)$ alors

$$f := \frac{g}{\Delta} \in \mathcal{M}_{k-12}(\Gamma)$$

puisque Δ a un unique zéro simple en $i\infty$, donc l'application est surjective.

3. On a déjà montré l'indépendance linéaire. On raisonne par récurrence sur k. Pour $k = 0$ on a montré que toute forme modulaire de poids 0 est constante. Soit $k > 0$, alors $k \geqslant 4$ est paire et s'écrit sous la forme $k = 4\alpha + 6\beta$. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que $f - CG_4^\alpha G_6^\beta$ est une forme parabolique donc d'après la question précédente on a
$$f - CG_4^\alpha G_6^\beta = \Delta g$$
où g est une forme modulaire de poids $< k$. Par l'hypothèse de récurrence g est une combinaison linéaire de monômes en G_4 et G_6 ce qui donne une représentation de f comme somme de monômes en G_4 et G_6. Ceci conclut l'argument.

4. On peut raisonner par récurrence sur k, on a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_0(\Gamma) = 1$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_2(\Gamma) = 0$ et
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_k(\Gamma) = 1 + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_{k-12}(\Gamma).$$
Le membre de droite de la formule vérifie la même propriété de récurrence.

5. C'est une reformulation de la question 3, on envoie $X \mapsto G_4$ et $Y \mapsto G_6$. Notons que pour avoir un morphisme d'algèbres gradués il faut fixer X de degré 4 et Y de degré 6, ce qui, du point de vue de la géométrie algébrique, est très différent.