


# Introduction à la modélisation des Marchés Financiers

Vincent Vargas<sup>1</sup>

3 janvier 2012

---

1. Remerciements: Capital Fund Management (J.P. Bouchaud, Y. Lempereire, R. Allez, Nimbus: A. Bossard, S. Ciliberti, J.C. Domenge) 

# Table des matières

- 1 Ordres de grandeur
- 2 Faits stylisés empiriques
- 3 Faits stylisés empiriques intraday
- 4 Quelques modèles
- 5 Effets de taille finie et biais divers
- 6 Références

# Ordres de grandeur

Ordres de Grandeur sur les Contrats Futures :

Sous Jacent	Volume/Jour	$\sigma$	Spread	Nbre Trades
SP500	100 M \$	1 %	2 bp	qq/sec
Bund	120 M €	0.3 %	1 bp	qq/min
Crude	150 M \$	2 %	1 bp	1/ qq sec
Devise €/ \$	125 M \$	0.8 %	0.7 bp	qq/sec

Total des transactions : 2000 M \$ (Interbank), soit le PIB de la France.

# Ordres de grandeur

Ordres de Grandeur sur les Stocks (US NYSE ou NASDAQ) :

- Market Cap  $K$  : 1 M \$  $\rightarrow$  500 M \$ de loi  $f(K) \sim \frac{1}{K^\nu}$  avec  $\nu \sim 1$ .
- Volume/Jour  $\sim 0.1\%$  Market Cap
- Liquidité du carnet d'ordre  $\sim 10^{-5} - 10^{-4}$  Market Cap
- $\sigma \sim 2\%$  (de loi  $\sigma(K) \sim \frac{1}{\ln(K)}$ )
- Tick : qq bp  $\rightarrow$  10 bp
- Spread : 1 Tick  $\rightarrow$  10 Tick.
- Nbre Trades : 1/10 min  $\rightarrow$  qq/sec.

# Le problème de la modélisation

Dans le problème de modélisation du prix (en continu), comment traiter :

- Week-end, jours fériés
- Overnight ( $\sim 2h$ )
- open/close
- News Macro (14h30)
- Discrétisation : effet du Tick a haute fréquence

# Le problème de la modélisation

Quelle est la bonne variable à regarder :  $X_t = S_t$  ou  $X_t = \ln(S_t)$ ?  
Dans la suite, on prendra  $X_t = \ln(S_t)$ .

Toutes les échelle de temps  $\tau$  sont intéressantes; on note :

$$r_t = r_t^{(\tau)} = X_{t+\tau} - X_t.$$

Il existe des modèles discrets à échelle fixe  $\tau$  (GARCH,etc...) et des modèles continus, qui proposent donc une règle pour relier la loi des rendements à différentes échelles  $\tau$  (Vol Stochastique, locale, modèle Multifractal,etc...).

# Le problème de la modélisation

A priori, il faut distinguer deux échelles (on note  $\tau_c$  le temps qui correspond à 100 trades; typiquement  $\tau_c \sim 1 - 10$  mins.) :

- $\tau \leq \tau_c$  : on est dans le domaine de la ultra haute fréquence (HF). Ambiguïté dans la définition du prix : le tick, bid-ask spread jouent un rôle. Etude des carnets d'ordre, ordre marché, limite, etc... Les rendements peuvent être corrélés.
- $\tau > \tau_c$  : les rendements sont décorrélés.

Il n'existe pas de modèle continu "référence" qui modélise toutes les échelles. Dans la suite du cours, on se placera dans le cas  $\tau > \tau_c$ .

# Le problème de la modélisation

Dans le cas discret, on décompose  $(r_t)_{t \in \mathbb{Z}} = (\sigma_t \epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  avec :

- $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  la volatilité (très corrélée).
- $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  une suite i.i.d. centrée de variance 1 (typiquement de loi normale ou Student, etc...).

Dans toute la suite du cours, on suppose que  $(r_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est une suite stationnaire et que pour tout  $t$  la variable  $\epsilon_t$  est indépendant de  $(\sigma_s)_{s \leq t}$ . On se place donc dans le cadre d'un marché efficient ( $E[r_t | (r_s)_{s \leq t-1}] = 0$ ).

## Remarque

*On autorise  $\sigma_t$  à dépendre des  $\epsilon_s$  pour  $s \leq t - 1$ .*



# Le problème de la modélisation à temps fixe $t$ : Moments de la variable

En l'absence de modèle sur les rendements, on peut tout de même étudier les cumulants. Si  $r$  est une variable aléatoire de moyenne  $m$ , on introduit les 3 premiers cumulants :

- l'écart type :  $\sigma^2 = E[(r - m)^2]$ .
- la skewness :  $\mathcal{S} = \frac{E[(r-m)^3]}{\sigma^3}$  (mesure de la dissymétrie des queues de distribution).
- la kurtosis :  $\kappa = \frac{E[(r-m)^4]}{\sigma^4} - 3$  (mesure du poids des queues de distribution).

## Remarque

*Dans le cas de la gaussienne, on a  $\mathcal{S} = 0$  et  $\kappa = 0$ .*

# Le problème de la modélisation à temps fixe $t$ :

## Distribution des returns

Sur les graphes suivants, on montre la distribution des returns journaliers des stocks du SP500 sur la période 2001-2007.

Sur le premier graphe est inclus un fit par une loi de Student :

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\mu+1}{2})}{\sqrt{\mu\pi}\Gamma(\frac{\mu}{2})} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{\mu+1}{2}}}$$

Empiriquement, on trouve une kurtosis infinie !

# Distribution de returns

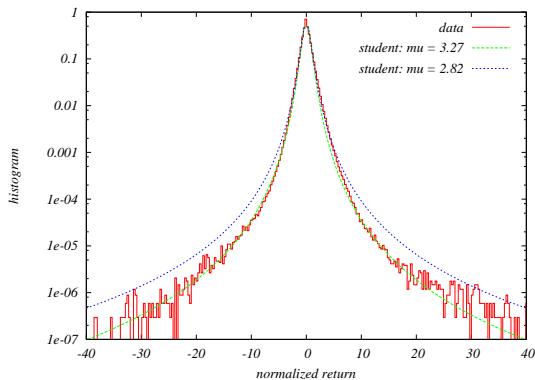


FIGURE: Distribution des returns sur la période 2001-2007.

# Exposant de queue des returns

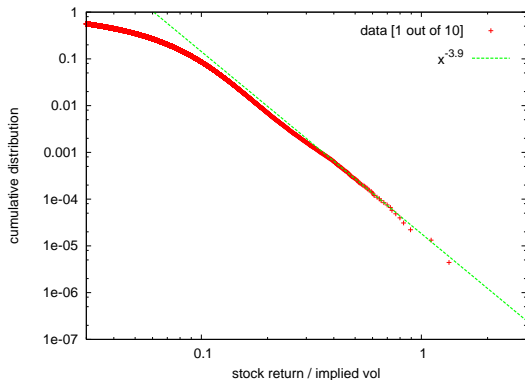


FIGURE: Distribution des returns sur la période 2001-2007.

# Le problème de la modélisation dynamique : Corrélations

En général, en l'absence de modèle, on considère les corrélations suivantes :

- Corrélations de volatilité :

$$g(t) = \frac{E[(\sigma_s^2 - \sigma^2)(\sigma_{s+t}^2 - \sigma^2)]}{\sigma^4}$$

En finance, typiquement  $g(t) \approx \frac{c}{t^\nu}$  avec  $\nu \in [0, 1]$ .

- Corrélations Return-Volatilité :

$$g_L(t) = \frac{E[(r_s - m)(r_{s+t}^2 - \sigma^2)]}{\sigma^3}$$

En finance, typiquement  $g_L(t) \approx -Ce^{-t/T}$ .

Bien sûr, selon les marchés, il peut exister beaucoup de corrélations non triviales "cachées" (cf. travaux de Zumbach).

# Formule de la skew et de la kurtosis en fonction de l'échelle de temps $T$

On note  $r_t^{(T)}$  le log-rendement entre  $t$  et  $t + T$  (i.e.  $r_t^{(T)} = r_{t+1} + \dots + r_{t+T}$  où les  $r_t$  sont les rendements entre  $t$  et  $t - 1$ ). On a la formule suivante pour la skew  $S_T$  de  $r_t^{(T)}$  en fonction de  $T$  :

## Proposition

$$S_T = \frac{S_1}{\sqrt{T}} + \frac{3}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) g_L(t).$$

## Remarque

*Dans le cas i.i.d, la skew décroît en  $\frac{1}{\sqrt{T}}$ .*

# Formule de la skew et de la kurtosis en fonction de l'échelle de temps $T$

On a la formule suivante pour la kurtosis  $\mathcal{K}_T$  de  $r_t^{(T)}$  en fonction de  $T$  :

## Proposition

*Si  $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est indépendant de  $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  :*

$$\kappa_T = \frac{\kappa_1}{T} + \frac{6}{T} \sum_{t=1}^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) g(t).$$

## Remarque

*Dans le cas i.i.d, la kurtosis décroît en  $\frac{1}{T}$  (sur les marchés, on observe une décroissance en  $\frac{1}{T^\nu}$  avec  $\nu \in [0, 1]$ .)*

# Skewness de quelques Indices

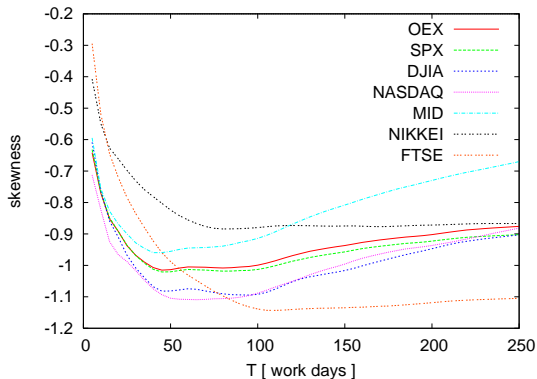


FIGURE: Skewness empirique de quelques indices sur la période 2001-2007.



# Approximation gaussienne (Edgeworth expansion)

On note  $N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$  (et  $\bar{N}(x) = 1 - N(x)$ ). On obtient le développement suivant lorsque  $r$  est une variable aléatoire de moyenne  $m$ , de skew  $\mathcal{S} \ll 1$  (et kurtosis  $\kappa \ll 1$ ) :

Proposition (Edgeworth expansion)

$$P\left(\frac{r - m}{\sigma} > x\right) - \bar{N}(x) \approx \frac{\mathcal{S}}{6} N^{(3)}(x) - \frac{\kappa}{24} N^{(4)}(x).$$

# Formules approchées pour la skew et la kurtosis

On déduit de la Edgeworth expansion les formules approchées suivantes (utiles car l'estimation directe de  $\mathcal{S}$  et  $\kappa$  est très bruitée en pratique) :

- $\mathcal{S} \approx \frac{6(m-M)}{\sigma}$  où  $M$  est la médiane de la loi  $r$ .
- $\kappa \approx 24\left(1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{E[|r-m|]}{\sigma}\right) + \mathcal{S}^2$

# Faits stylisés empiriques

On appelle faits stylisés des propriétés "universelles" partagées par l'ensemble des actifs financiers : actions, indices, devises, bonds, etc... Néanmoins, il existe certains faits stylisés spécifiques à certains actifs. Exemple : l'effet levier des actions ou indices.

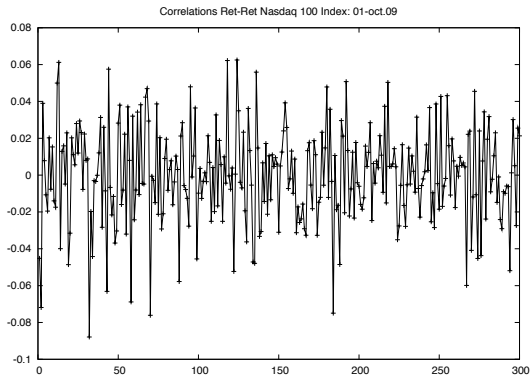
Dans cette partie, nous allons présenter les principaux faits stylisés à travers l'étude de deux indices (rigoureusement, on présente l'ETF qui traque l'indice) : le SP500 et le Nasdaq 100 Index.

# Corrélation nulle des rendements

Le log prix  $X_t$  d'un bon modèle de finance doit vérifier (cf. figures suivantes où l'on présente des corrélations empiriques daily) :

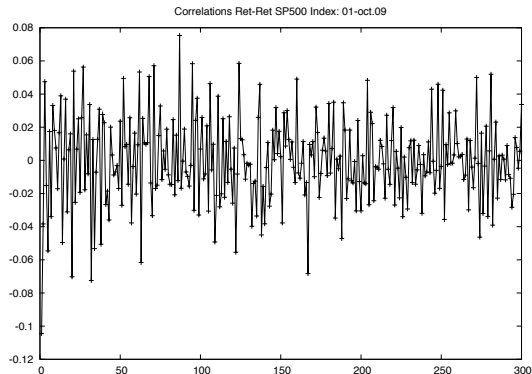
$$E[X_s(X_t - X_s)] = 0.$$

# Corrélation nulle des rendements du Nasdaq 100



**FIGURE:** Corrélation empirique daily de l'indice Nasdaq sur la période 2001-2009.

# Corrélation nulle des rendements du SP500



**FIGURE:** Corrélation empirique daily de l'indice SP500 sur la période 2001-2009.

# Corrélations de longue portée de la volatilité : définition de la volatilité

En pratique, la volatilité désigne toute mesure de l'agitation (Définition ambiguë). Si  $X_t$  est le log prix, on définit :

- la volatilité théorique (difficile à observer : filtrage, etc...) entre le temps  $s$  et  $t$  comme la racine de la variation quadratique  $\langle X \rangle_{s,t}$  de  $X$  :

$$\langle X \rangle_{s,t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2,$$

où  $s = t_0 < \dots < t_n = t$  est une subdivision de  $[s, t]$  dont le pas tend vers 0.

- la volatilité en pratique entre  $s$  et  $t$  (on parle de proxy) :

$$|X_t - X_s|, \sup_{u \in [s,t]} X_u - \inf_{u \in [s,t]} X_u, \text{ etc...}$$

# Corrélations de longue portée de la volatilité

Un bon modèle de la finance doit vérifier (Corr désigne les corrélations) :

$$\text{Corr}(\langle X \rangle_{0,1}, \langle X \rangle_{t,t+1}) = A/(1+t)^\mu,$$

avec  $\mu \in [0, 0.5]$ .

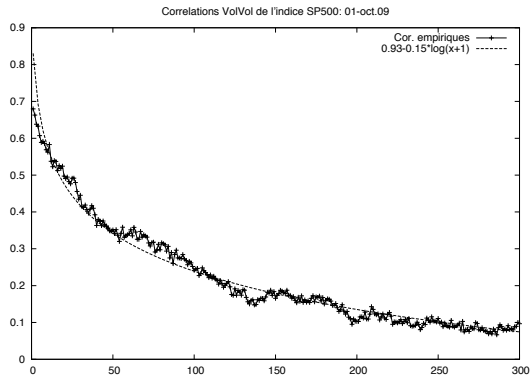
Le Modèle multifractal correspond approximativement au cas  $\mu \rightarrow 0$  :

$$\text{Corr}(\langle X \rangle_{0,1}, \langle X \rangle_{t,t+1}) = A - B \ln(t+1).$$

Dans les figures suivantes, on considère les corrélations de vol avec  $\sigma_{HL}(t) = \sup_{u \in [t,t+1]} X_u - \inf_{u \in [t,t+1]} X_u$  comme proxy de  $\sqrt{\langle X \rangle_{t,t+1}}$  ( $t$  est exprimé en jours).

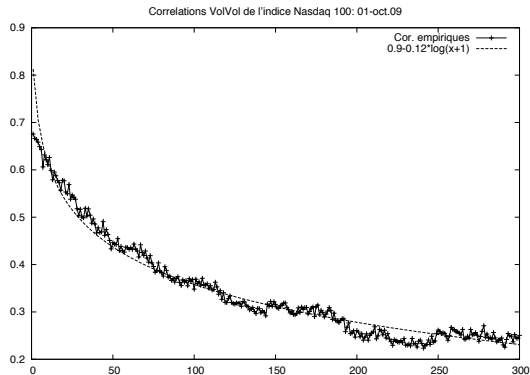


# Corrélations de la volatilité du SP500



**FIGURE:** Corrélations empiriques de la vol de l'indice SP500 sur la période 2001-2009.

# Corrélations de la volatilité du Nasdaq 100



**FIGURE:** Corrélations empiriques de la vol de l'indice Nasdaq 100 sur la période 2001-2009.

# Distribution de la volatilité

La distribution de  $\langle X \rangle_{s,t}$  pour  $s < t$  suit approximativement une loi lognormale. Dans les figures suivantes, on regarde les distributions empiriques daily renormalisés (entre  $t$  et  $t + 1$ ) du proxy de  $\sqrt{\langle X \rangle_{t,t+1}}$  :

$$\sigma_{HL}(t) = \sup_{u \in [t, t+1]} X_u - \inf_{u \in [t, t+1]} X_u$$

On peut fiter la distribution empirique de  $\sigma_{HL}(t)$  par :

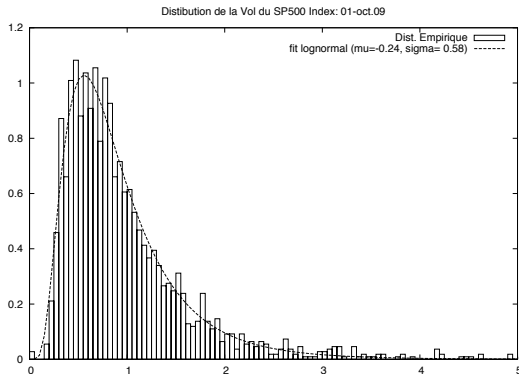
- une distribution lognormale de densité :

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- une distribution inverse gamma de densité :

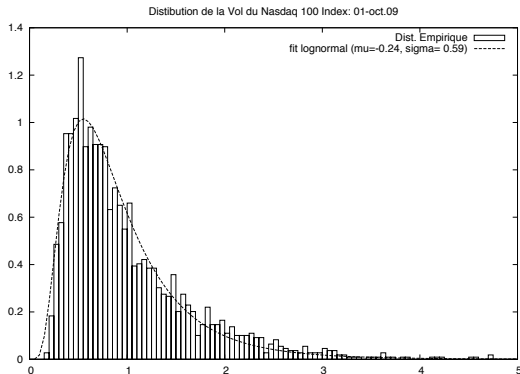
$$f(x) = \frac{A^\nu}{\Gamma(\nu)x^{1+\nu}} e^{-\frac{A}{x}}.$$

# Distribution de la volatilité du SP500



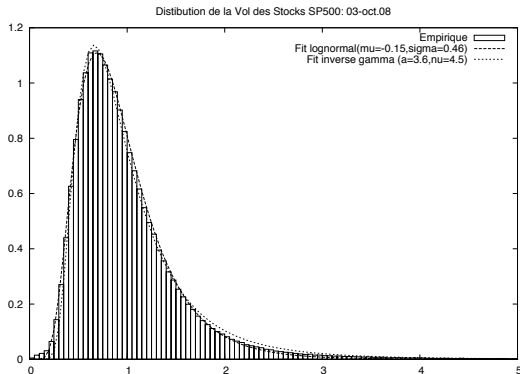
**FIGURE:** Distribution empirique de la vol de l'indice SP500 sur la période 2001-2009.

# Distribution de la volatilité du Nasdaq



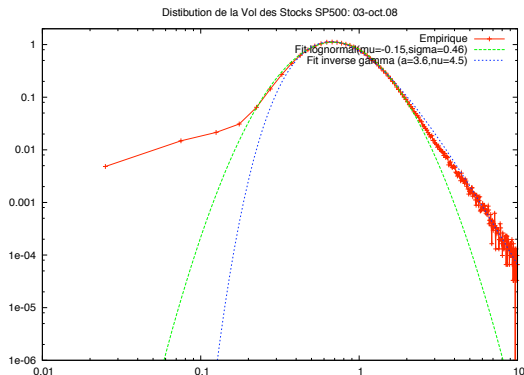
**FIGURE:** Distribution empirique de la vol de l'indice Nasdaq sur la période 2001-2009.

# Distribution de la volatilité des stocks du SP500



**FIGURE:** Distribution empirique de la vol des stocks du SP500 sur la période 2001-2007.

# Distribution de la volatilité des stocks du SP500



**FIGURE:** Distribution empirique log-log de la vol des stocks du SP500 sur la période 2001-2007.

# Effet Levier : corrélations Ret-Vol

Un bon modèle de la finance (actions ou indices) doit vérifier :

$$\frac{E[X_1 \langle X \rangle_{t,t+1}]}{E[\langle X \rangle_{t,t+1}]^2} = -Ae^{-t/L}, \quad (\text{Corrélations Ret-Vol})$$

où  $A > 0$  et  $L$  est une échelle de décorrélation.

Dans les figures suivantes, on considère les corrélations Ret-Vol avec  $\sigma_{HL} = \sup_{u \in [t,t+1]} X_u - \inf_{u \in [t,t+1]} X_u$  comme proxy de  $\sqrt{\langle X \rangle_{t,t+1}}$  ( $t$  est exprimé en jours).



# Effet Levier de l'indice SP500

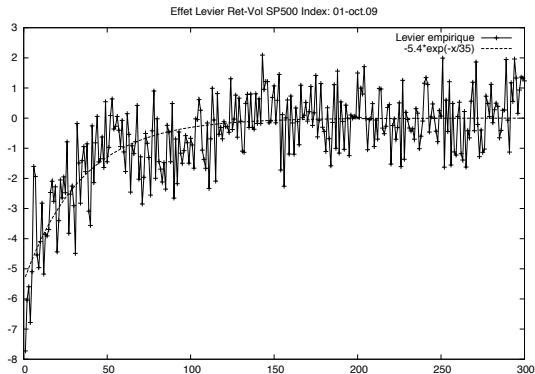


FIGURE: Effet Levier du SP500 sur la période 2001-2009.

# Effet Levier de l'indice Nasdaq

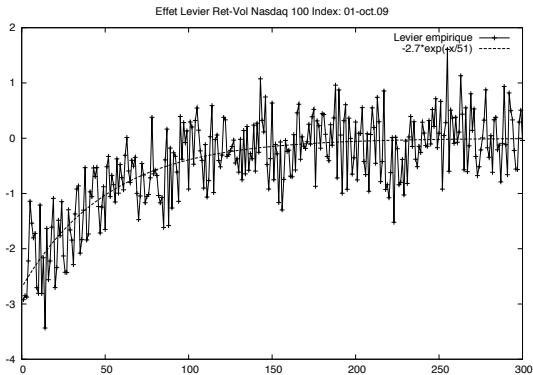
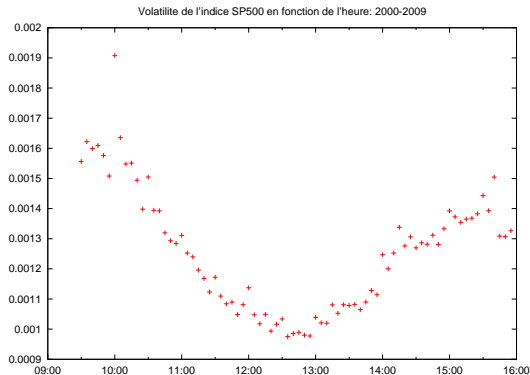


FIGURE: Effet Levier du Nasdaq sur la période 2001-2009.

# Faits stylisés empiriques intraday

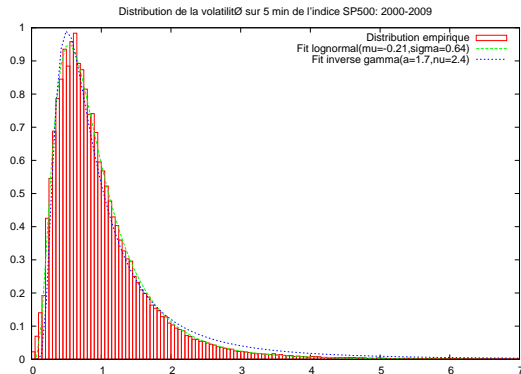
Dans cette section, nous montrons quelques courbes empiriques intraday de l'indice SP500. Il est important dans toute étude statistique intraday de tenir compte de la saisonnalité présentée sur la figure suivante (le fameux U-effect de l'activité en fonction de l'heure de la journée).

# U-effect de la volatilité en fonction de l'heure de la journée



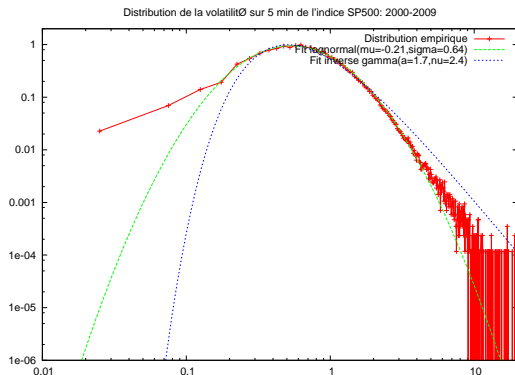
**FIGURE:** Volatilité  $\log(H/L)$  sur 5 mins de l'indice SP500 sur la période 2000-2009.

# Distribution de la volatilité de l'indice SP500 sur 5 mins



**FIGURE:** Distribution empirique sur 5 mins de la vol  $\log(H/L)$  de l'indice SP500 sur la période 2000-2009.

# Distribution de la volatilité de l'indice SP500 sur 5 mins



**FIGURE:** Distribution empirique log-log de la vol  $\log(H/L)$  de l'indice SP500 sur la période 2000-2009.

## Modèles sans Levier :

- Black-Scholes :  $\sigma_t = \sigma$ .
- GARCH(1,1) :  $\sigma_t^2 = \sigma^2 + \alpha(\sigma_{t-1}^2 - \sigma^2) + \beta(r_{t-1}^2 - \sigma^2)$  avec  $\alpha + \beta < 1$
- Volatilité stochastique :  $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est indépendant de  $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ .
- Multifractal (cas particulier de Vol. Stochastique) :  
 $\sigma_t = \sigma e^{\omega_t - E[\omega_t^2]}$ , où  $(\omega_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus gaussien centré de covariance  $E[\omega_s \omega_t] = \lambda^2 \ln^+ \frac{T}{|t-s|+1}$ .

# Quelques modèles en discret

## Modèles avec Levier :

- GARCH(1,1) asymétrique :  $\sigma_t^2 = \sigma^2 + \alpha(\sigma_{t-1}^2 - \sigma^2) + \beta_-(r_{t-1}^2 - \sigma^2)1_{r_{t-1} < 0} + \beta_+(r_{t-1}^2 - \sigma^2)1_{r_{t-1} > 0}$   
avec  $\alpha + \beta_-/2 + \beta_+/2 < 1$ .
- Volatilité locale :  $\sigma_t = \sigma(S_{t-1})$  où  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Retarded model :  $S_{t+1} - S_t = (\sigma \sum_{k=0}^{\infty} K(t) S_{t-k}) \epsilon_t$  où  $K$  est un noyau de somme 1 :  $\sum_{t=0}^{\infty} K(t) = 1$ .
- Volatilité stochastique avec Levier :  
 $\sigma_t = \bar{\sigma}_t - \beta \sum_{k=-\infty}^{t-1} e^{-\alpha(t-k)} \epsilon_k$  où  $(\bar{\sigma}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est indépendant de  $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  et  $\alpha, \beta > 0$ .



# Effets de taille finie et biais divers

En finance, on dispose de séries de taille finie. Il se pose donc le problème de la convergence des estimateurs et du caractère biaisé de ceux-ci. Soit  $x = (x_1, \dots, x_N)$  la réalisation d'une série temporelle  $(X_i)_{i \geq 1}$  stationnaire centrée de taille  $N$  et de covariance donnée par :

$$C(j) = E[(X_i - E[X])(X_{i+j} - E[X])].$$

Nous allons nous poser deux questions sur des exemples concrets :

- Peut-on estimer la variance de  $X_1$  ?
- Peut-on estimer les corrélations de de  $(X_i)_{i \geq 1}$  ?

# Estimation de la variance

On considère l'estimateur classique de la variance

$V(x) = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$  où  $\bar{\cdot}$  désigne des moyennes empiriques  
( $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ ) :

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

Le biais est alors :

$$E[V(X)] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2\right] = \left(1 - \frac{1}{N}\right)C(0) - \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{k}{N}\right)C(k)$$

# Estimation de la variance : applications numériques

Considérons 8 ans de données journalières ( $N \approx 2000$ ). On va considérer deux cas (Ornstein-Uhlenbeck et Multifractal) :

- $(X_i)_{i \geq 1}$  processus gaussien centré et  $E[X_i X_{i+j}] = e^{-j/T}$ . On va supposer  $T \approx 100$ .
- $(X_i)_{i \geq 1}$  processus gaussien centré avec  $E[X_i X_{i+j}] = \lambda^2 \ln^+(T/(j+1))$ . On va supposer que  $\lambda^2 \approx 0.03$  et  $T \approx 2000$ .

# Estimation de la variance : applications numériques

Numériquement, on trouve :

- pour le O-U :  $E[V(X)] \approx 1 - \frac{1}{N} - \frac{2}{N} \int_{x=1}^N (1 - x/N)e^{-x/T} \approx 1 - \frac{2}{N} \int_{x=1}^N e^{-x/T} \approx 1 - 2T/N \approx 0.9$  (Erreur de 10% !)
- pour le multifractal :  $\frac{E[V(X)]}{\lambda^2 \ln(T)} \approx 0.8$  (Erreur de 20% !)

Ces exemples montrent l'importance de travailler avec des estimateurs non biaisés pour évaluer les divers paramètres (on abordera dans la suite du cours le problème de l'estimation des paramètres du modèle MRW : il existe par exemple des estimateurs simples et non biaisés de  $\lambda^2$ ).

# Estimation des corrélations

On considère la fonction de corrélations empirique  $C_e(j)$  donnée par :

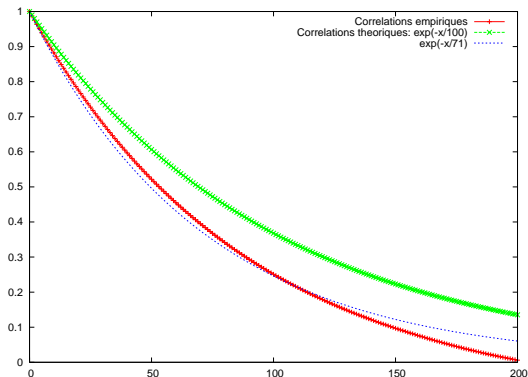
$$C_e(j) = \frac{1}{N-j} \frac{\sum_{k=1}^{N-j} (x_k - \bar{x})(x_{k+j} - \bar{x})}{V(x)}$$

Les fonctions  $C_e$  vérifient :

$$\sum_{j=1}^N \left(1 - \frac{j}{N}\right) C_e(j) = -\frac{1}{2}.$$

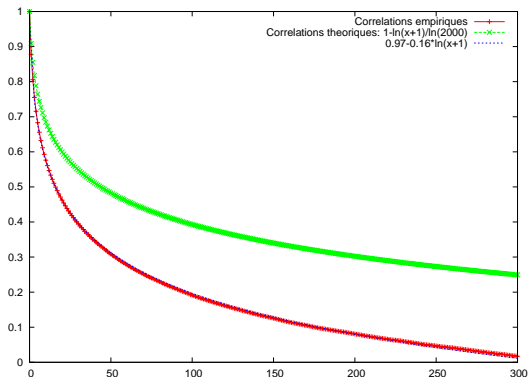
Empiriquement, on trouve des corrélations négatives ! (sur les figures suivantes, on compare les corrélations empiriques et théoriques pour les O-U et le multifractal)

# Corrélations empiriques et théoriques de l'Ornstein-Uhlenbeck



**FIGURE:** Corrélations empiriques typiques pour une série de taille  $N=1750$  (7 ans) avec un O-U de paramètre  $T=100$

# Corrélations empiriques et théoriques du multifractal



**FIGURE:** Corrélations empiriques typiques pour une série de taille  $N=1750$  (7 ans) avec un multifractal de paramètre  $\lambda^2 = 0.02$  et  $T=2000$

Livres et articles généraux sur l'econophysics et la finance empirique :

- **Bouchaud, Potters** : *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing*, Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- **Cont** : Empirical properties of asset returns : stylized facts and statistical issues, *Quantitative Finance*, **1** no.2 (2001), 223-236.
- **Dacorogna, Gencay, Muller, Olsen, Pictet** : *An Introduction to High-Frequency Finance*, Academic Press (2001).
- **Cizeau, Gopikrishnan, Liu, Meyer, Peng, Stanley** : Statistical properties of the volatility of price fluctuations, *Physical Review E*, **60** no.2 (1999), 1390-1400.



Quelques livres et articles sur les modèles multifractaux :

- **Bacry, Kozhemyak, Muzy** : Continuous cascade models for asset returns, available at [www.cmap.polytechnique.fr/~bacry/biblio.html](http://www.cmap.polytechnique.fr/~bacry/biblio.html), to appear in *Journal of Economic Dynamics and Control*.
- **Bacry, Muzy** : Log-infinitely divisible multifractal process, *Communications in Mathematical Physics*, **236** (2003), 449-475.
- **Calvet, Fisher** : *Multifractal Volatility : Theory, Forecasting, and Pricing*, Academic Press (2008).
- **Duchon, Robert, Vargas** : Forecasting volatility with the multifractal random walk model, to appear in *Mathematical Finance*.

## Articles sur l'effet Levier :

- **Bouchaud, Matacz, Potters** : Leverage Effect in Financial Markets : The Retarded Volatility Model, *Phys. Rev. Lett.*, **87** (2001), 228701.
- **Bouchaud, Pochart** : The skewed multifractal random walk with applications to option smiles, *Quantitative Finance*, **2** (2002), 303–314.
- **Bacry, Duvernet, Muzy** : travail en cours.

Livres et articles autour des travaux de Mandelbrot :

- **Mandelbrot, Taylor** : On the distribution of stock price differences, *Operations Research*, **15** (1967), 1057-1062.
- **Mandelbrot** : A possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy in intermittent turbulence, *Statistical Models and Turbulence*, La Jolla, CA, Lecture Notes in Phys. no. 12, Springer, (1972), 333-351.
- **Mandelbrot** : *Fractals and Scaling in Finance*, Springer-Verlag (1997).
- **Borland, Bouchaud, Muzy, Zumbach** : The Dynamics of Financial Markets - Mandelbrot's Multifractal Cascades, and Beyond, *Wilmott magazine*.