

Présentation du modèle MRW (Multifractal Random Walk) et des faits stylisés empiriques

Vincent Vargas¹

28 novembre 2010

1. Remerciements: Capital Fund Management (J.P. Bouchaud, Marc Potters et équipe du fond Nimbus: S. Ciliberti, J.C. Domenge), Rémi Rhodes, Romain Allez

Table des matières

- 1 Le modèle MRW (Multifractal Random Walk)
- 2 Faits stylisés empiriques et modèle MRW
- 3 Faits stylisés empiriques intraday
- 4 Effets de taille finie et biais divers
- 5 Références

Le modèle limite lognormal (volatilité)

La volatilité M est une mesure aléatoire définie formellement par :

$$M[0, t] = \sigma \int_{[0, t]} e^{2\lambda\omega_s - 2\lambda^2 E[(\omega_s)^2]} ds, \quad t \geq 0$$

ou ω est un "processus" gaussien centré de corrélations :

$$E[\omega_s \omega_t] = \ln^+ \left(\frac{T}{|t - s|} \right)$$

- σ : volatilité moyenne
- λ^2 : paramètre d'intermittence
- T : échelle intégrale (cut-off)

- 1962 : **Kolmogorov-Obukhov** : modèle lognormal (*Journal of Fluid Mechanics*).
- 1972 : **Mandelbrot** définit le modèle limite lognormal.
- 1985 : **Kahane** définit la théorie de Chaos multiplicatif gaussien (Sur le chaos multiplicatif, *Annales Scientifiques et Mathématiques Québec*). C'est une théorie générale dont le modèle limite lognormal est un cas particulier.

Le modèle limite lognormale (volatilité)

On définit rigoureusement M par un procédé limite $M = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} M_\epsilon$ avec (les détails dans le prochain cours) :

$$M_\epsilon[0, t] = \sigma \int_{[0, t]} e^{2\lambda\omega_s^\epsilon - 2\lambda^2 E[(\omega_s^\epsilon)^2]} ds, \quad t \geq 0$$

où ω^ϵ est un processus gaussien centré de corrélations :

$$E[\omega_s^\epsilon \omega_t^\epsilon] = \begin{cases} (\ln \frac{T}{\epsilon} + 1 - \frac{|t-s|}{\epsilon}) & \text{pour } |t-s| \leq \epsilon, \\ \ln^+ \frac{T}{|t-s|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le modèle limite lognormale (volatilité)

Théorème (Kahane, 1985)

La mesure aléatoire M est différente de 0 si et seulement si $\lambda^2 < 1/2$.

Définition (Le modèle MRW, Bacry, Delour, Muzy, 2000)

Le log prix $X_t = \ln(P_t)$ est donné par :

$$X_t = B_{M[0,t]},$$

où B est un mouvement brownien indépendant de M .

L'idée de changer de temps un mouvement brownien pour obtenir un bon modèle de finance : Mandelbrot, Taylor (1967).

Approximation discrète du MRW

On considère :

- $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ suite i.i.d. de variables gaussiennes centrées et de variance 1 (plus généralement, on peut aussi choisir n'importe quelle suite i.i.d. centrée de variance 1).
- $(\omega_n^\tau)_{n \geq 1}$ suite de variables gaussiennes centrées et de corrélations (τ échelle de discrétisation) :

$$E[\omega_n^\tau \omega_p^\tau] = \ln^+ \left(\frac{T}{(|n-p|+1)\tau} \right).$$

Théorème

On a la convergence en loi (fonctionnelle) :

$$B_{M[0,t]} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma \sqrt{\tau} \sum_{n=1}^{\lfloor t/\tau \rfloor} e^{\lambda \omega_n^\tau - \lambda^2 \ln^+(T/\tau)} \epsilon_n, \quad t \geq 0.$$

Généralisations du modèle MRW et autres modèles

Nous ne parlerons pas dans ce cours des modèles multifractaux suivants :

- Généralisation du MRW (**Bacry, Muzy**) : le modèle MRW log-infiniment divisible (ω est dans ce cas une loi infiniment divisible).
- Modèle MMAR (**Calvet, Fisher, Mandelbrot**)
- Modèle MSM (**Calvet, Fisher**)

Table des matières

- 1 Le modèle MRW (Multifractal Random Walk)
- 2 Faits stylisés empiriques et modèle MRW
- 3 Faits stylisés empiriques intraday
- 4 Effets de taille finie et biais divers
- 5 Références

Faits stylisés empiriques et modèle MRW

On appelle faits stylisés des propriétés "universelles" partagées par l'ensemble des actifs financiers : actions, indices, devises, bonds, etc... Néanmoins, il existe certains faits stylisés spécifiques à certains actifs. Exemple : l'effet levier des actions ou indices.

Dans cette partie, nous allons présenter les principaux faits stylisés à travers l'étude de deux indices (rigoureusement, on présente l'ETF qui traque l'indice) : le SP500 et le Nasdaq 100 Index. Avant de présenter ces faits stylisés, observons quelques courbes des indices et du MRW simulé pour "sentir" le phénomène d'intermittence.

Intermittence de MRW en fonction de λ^2

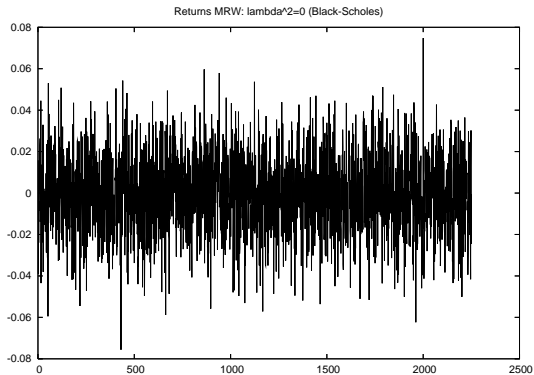


FIGURE: Returns simulés de MRW avec $\lambda^2 = 0$.

Intermittence de MRW en fonction de λ^2

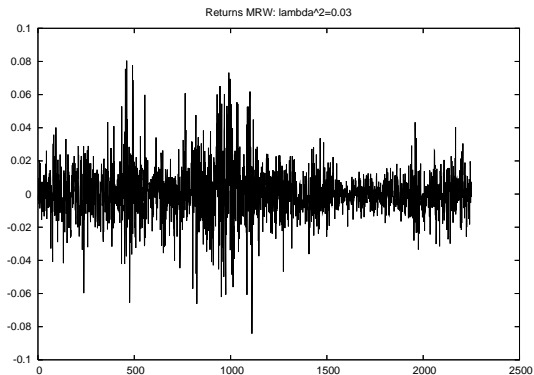


FIGURE: Returns simulés de MRW avec $\lambda^2 = 0.03$.

Intermittence de MRW en fonction de λ^2

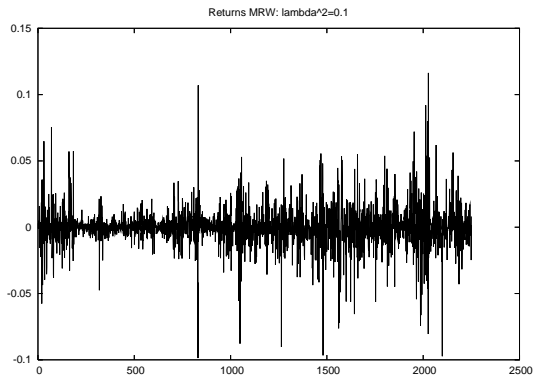


FIGURE: Returns simulés de MRW avec $\lambda^2 = 0.1$.

Intermittence de MRW en fonction de λ^2

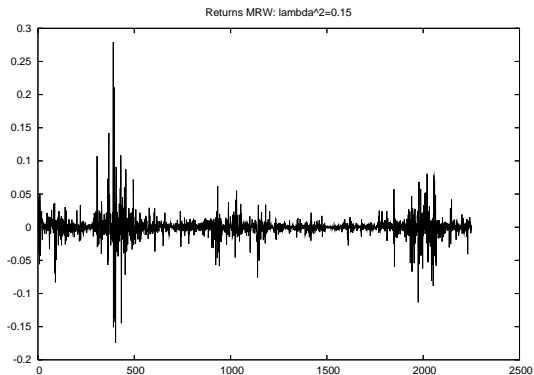


FIGURE: Returns simulés de MRW avec $\lambda^2 = 0.15$.

Intermittence du SP500

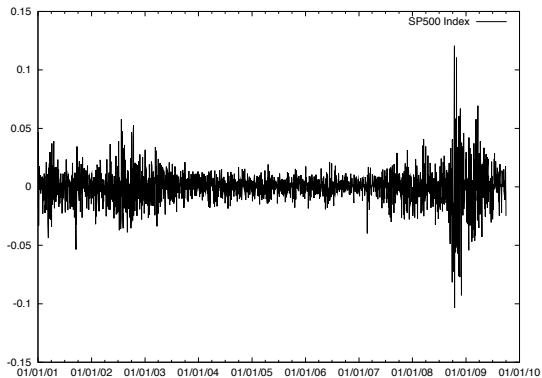


FIGURE: Returns de l'indice SP500 sur la période 2001-2009.

Intermittence du Nasdaq 100

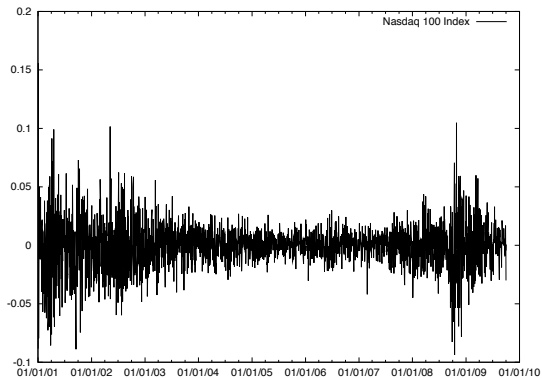


FIGURE: Returns de l'indice Nasdaq sur la période 2001-2009.

Faits stylisés empiriques et modèle MRW

Faits stylisés que vérifie le modèle MRW :

- Corrélation nulle des rendements
- Corrélations de longue portée pour la volatilité (Décroissance logarithmique ou en puissance $1/t^\mu$ avec $\mu \in [0, 0.5]$).
- Loi de puissance pour la queue de distribution des rendements (Bacry, Muzy, Kozhemyak , *Phys. Rev. E*, 2006).
- Volatilité aléatoire de distribution approximativement lognormale (une simplification contestable!).

Faits stylisés empiriques et modèle MRW

Faits stylisés que ne vérifie pas le modèle MRW :

- Effet Levier (Bouchaud, Matacz, Potters , *Phys. Rev. Lett.*, 2001). Travaux en cours pour construire un MRW skewed (Bouchaud, Pochart et Bacry, Duvernet, Muzy).
- Volatilité dissymétrique par retournement du temps (Zumbach).

Corrélation nulle des rendements

Le log prix X_t d'un bon modèle de finance doit vérifier (cf. figures suivantes où l'on présente des corrélations empiriques daily) :

$$E[X_s(X_t - X_s)] = 0.$$

C'est le cas de MRW.

Corrélation nulle des rendements du Nasdaq 100

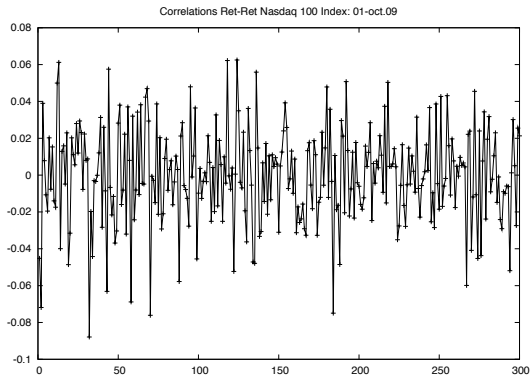


FIGURE: Corrélation empirique daily de l'indice Nasdaq sur la période 2001-2009.

Corrélation nulle des rendements du SP500

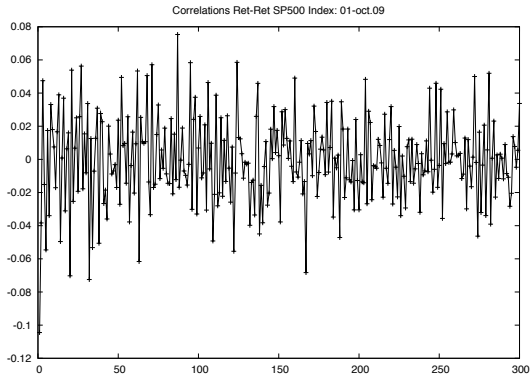


FIGURE: Corrélation empirique daily de l'indice SP500 sur la période 2001-2009.

Corrélations de longue portée de la volatilité : définition de la volatilité

En pratique, la volatilité désigne toute mesure de l'agitation. Si X_t est le log prix, on définit :

- la volatilité théorique (difficile à observer : filtrage, etc...) entre le temps s et t comme la variation quadratique $\langle X \rangle_{s,t}$ de X :

$$\langle X \rangle_{s,t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2,$$

où $s = t_0 < \dots < t_n = t$ est une subdivision de $[s, t]$ dont le pas tend vers 0.

- la volatilité en pratique entre s et t (on parle de proxy) :

$$|X_t - X_s|, (X_t - X_s)^2, \sup_{u \in [s,t]} X_u - \inf_{u \in [s,t]} X_u, \text{ etc...}$$

Corrélations de longue portée de la volatilité

Un bon modèle de la finance doit vérifier :

$$\text{Corr}(\langle X \rangle_{0,1}, \langle X \rangle_{t,t+1}) = A/(1+t)^\mu,$$

avec $\mu \in [0, 0.5]$.

Le Modèle multifractal correspond approximativement au cas $\mu \rightarrow 0$:

$$\text{Corr}(\langle X \rangle_{0,1}, \langle X \rangle_{t,t+1}) = A - B \ln(t+1).$$

Dans les figures suivantes, on considère les corrélations de vol avec $\sigma_{HL} = \sup_{u \in [t,t+1]} X_u - \inf_{u \in [t,t+1]} X_u$ comme proxy de $\sqrt{\langle X \rangle_{t,t+1}}$ (t est exprimé en jours). Nous renvoyons à l'annexe pour l'utilisation de ce proxy plutôt que $|X_{t+1} - X_t|$ par exemple.

Corrélations de la volatilité du SP500

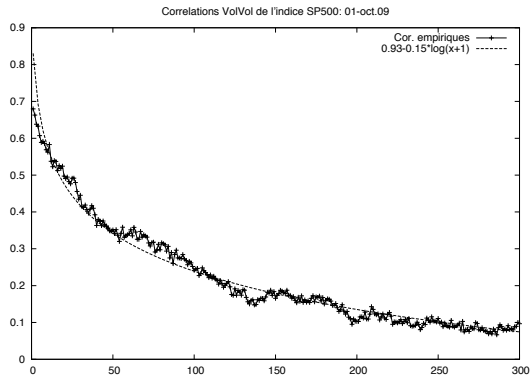


FIGURE: Corrélations empiriques de la vol de l'indice SP500 sur la période 2001-2009.

Corrélations de la volatilité du Nasdaq 100

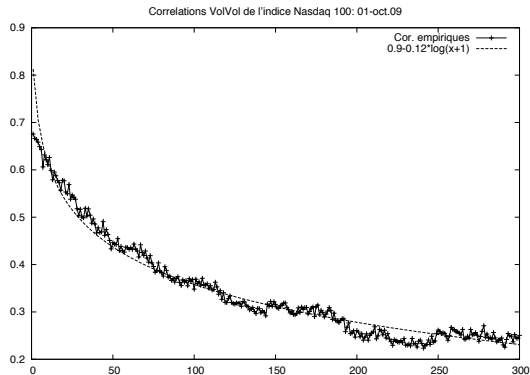


FIGURE: Corrélations empiriques de la vol de l'indice Nasdaq 100 sur la période 2001-2009.

Distribution de la volatilité

La distribution de $\langle X \rangle_{s,t}$ pour $s < t$ suit approximativement une loi lognormale. Dans les figures suivantes, on regarde les distributions empiriques daily renormalisés (entre t et $t + 1$) du proxy :

$$\sigma_{HL} = \sup_{u \in [t, t+1]} X_u - \inf_{u \in [t, t+1]} X_u$$

On peut fiter la distribution empirique de σ_{HL} par :

- une distribution lognormale de densité :

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- une distribution inverse gamma de densité :

$$f(x) = \frac{A^\nu}{\Gamma(\nu)x^{1+\nu}} e^{-\frac{A}{x}}.$$

Distribution de la volatilité du SP500

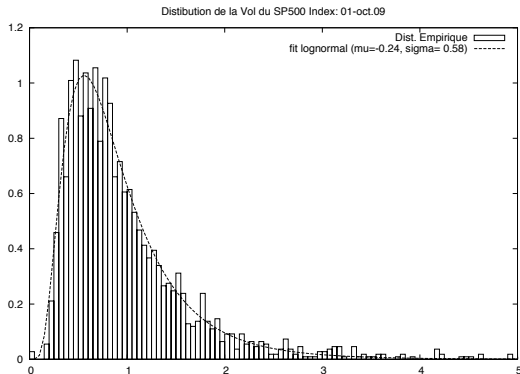


FIGURE: Distribution empirique de la vol de l'indice SP500 sur la période 2001-2009.

Distribution de la volatilité du Nasdaq

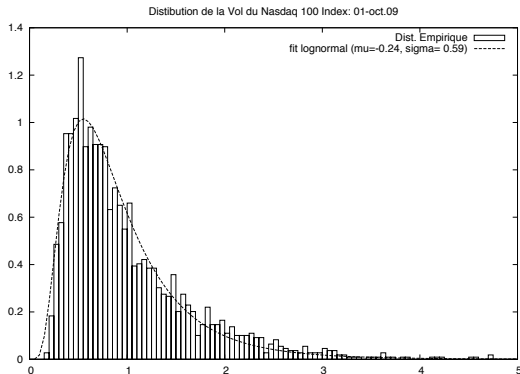


FIGURE: Distribution empirique de la vol de l'indice Nasdaq sur la période 2001-2009.

Distribution de la volatilité des stocks du SP500

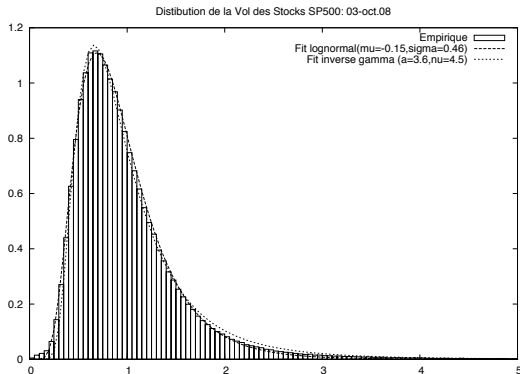


FIGURE: Distribution empirique de la vol des stocks du SP500 sur la période 2001-2007.

Distribution de la volatilité des stocks du SP500

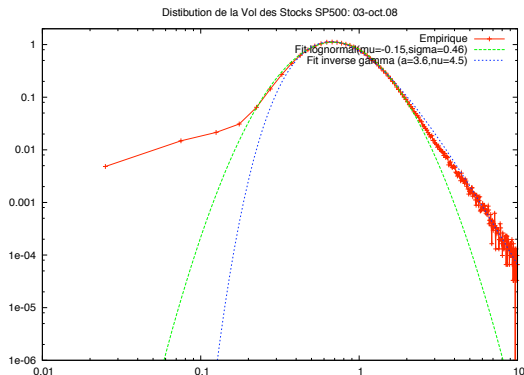


FIGURE: Distribution empirique log-log de la vol des stocks du SP500 sur la période 2001-2007.

Effet Levier : corrélations Ret-Vol

Un bon modèle de la finance (actions ou indices) doit vérifier :

$$\frac{E[X_1 \langle X \rangle_{t,t+1}]}{E[\langle X \rangle_{t,t+1}]^2} = -Ae^{-t/L}, \quad (\text{Corrélations Ret-Vol})$$

où $A > 0$ et L est une échelle de décorrélation.

Dans le modèle MRW, la quantité ci-dessus est nulle.

Dans les figures suivantes, on considère les corrélations Ret-Vol avec $\sigma_{HL} = \sup_{u \in [t,t+1]} X_u - \inf_{u \in [t,t+1]} X_u$ comme proxy de $\sqrt{\langle X \rangle_{t,t+1}}$ (t est exprimé en jours).

Effet Levier de l'indice SP500

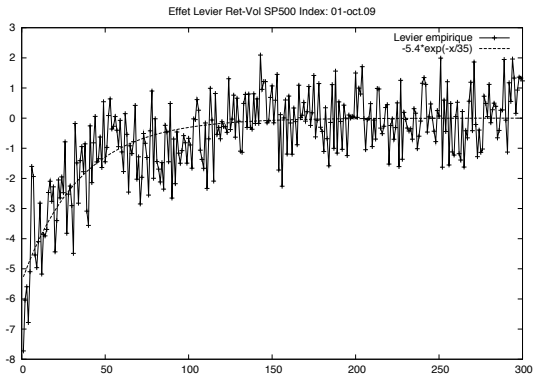


FIGURE: Effet Levier du SP500 sur la période 2001-2009.

Effet Levier de l'indice Nasdaq

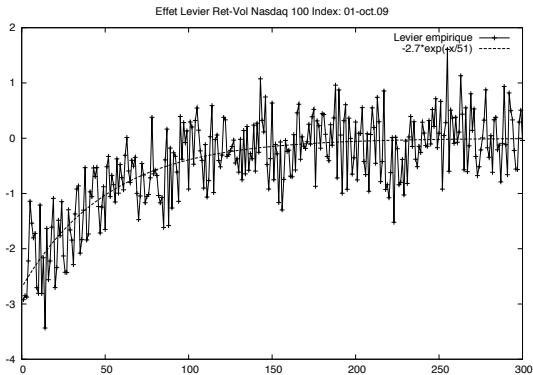


FIGURE: Effet Levier du Nasdaq sur la période 2001-2009.

Faits stylisés empiriques intraday

Dans cette section, nous montrons quelques courbes empiriques intraday de l'indice SP500 qui valident l'utilisation du modèle MRW. Il est important dans toute étude statistique intraday de tenir compte de la saisonnalité présentée sur la figure suivante (le fameux U-effect de l'activité en fonction de l'heure de la journée).

U-effect de la volatilité en fonction de l'heure de la journée

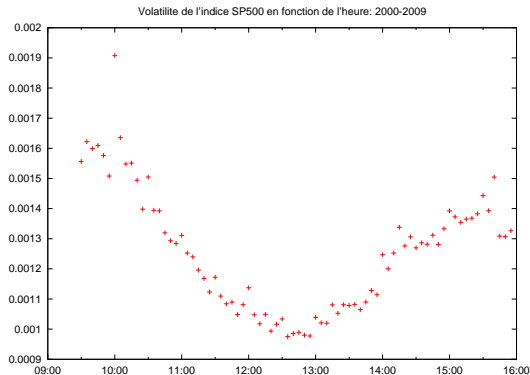


FIGURE: Volatilité $\log(H/L)$ sur 5 mins de l'indice SP500 sur la période 2000-2009.

Distribution de la volatilité de l'indice SP500 sur 5 mins

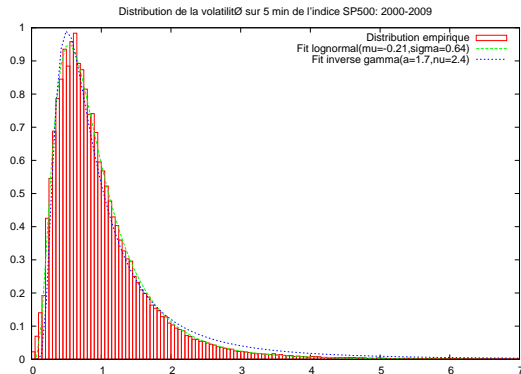


FIGURE: Distribution empirique sur 5 mins de la vol $\log(H/L)$ de l'indice SP500 sur la période 2000-2009.

Distribution de la volatilité de l'indice SP500 sur 5 mins

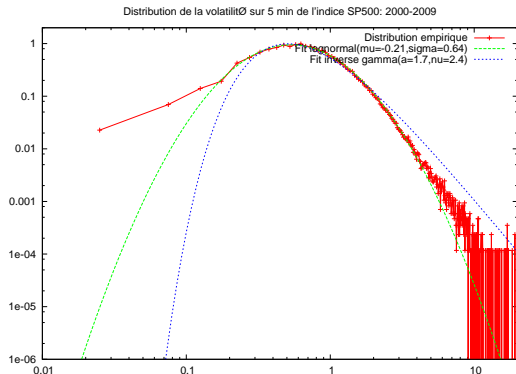


FIGURE: Distribution empirique log-log de la vol $\log(H/L)$ de l'indice SP500 sur la période 2000-2009.

Effets de taille finie et biais divers

En finance, on dispose de séries de taille finie. Il se pose donc le problème de la convergence des estimateurs et du caractère biaisé de ceux-ci. Soit $x = (x_1, \dots, x_N)$ la réalisation d'une série temporelle $(X_i)_{i \geq 1}$ stationnaire centrée de taille N et de covariance donnée par :

$$C(j) = E[(X_i - E[X])(X_{i+j} - E[X])].$$

Nous allons nous poser deux questions sur des exemples concrets :

- Peut-on estimer la variance de X_1 ?
- Peut-on estimer les corrélations de $(X_i)_{i \geq 1}$?

Estimation de la variance

On considère l'estimateur classique de la variance

$V(x) = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ où $\bar{\cdot}$ désigne des moyennes empiriques
($\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$) :

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

Le biais est alors :

$$E[V(X)] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2\right] = \left(1 - \frac{1}{N}\right)C(0) - \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{k}{N}\right)C(k)$$

Estimation de la variance : applications numériques

Considérons 8 ans de données journalières ($N \approx 2000$). On va considérer deux cas (Ornstein-Uhlenbeck et Multifractal) :

- $(X_i)_{i \geq 1}$ processus gaussien centré et $E[X_i X_{i+j}] = e^{-j/T}$. On va supposer $T \approx 100$.
- $(X_i)_{i \geq 1}$ processus gaussien centré avec $E[X_i X_{i+j}] = \lambda^2 \ln^+(T/(j+1))$. On va supposer que $\lambda^2 \approx 0.03$ et $T \approx 2000$.

Estimation de la variance : applications numériques

Numériquement, on trouve :

- pour le O-U : $E[V(X)] \approx 1 - \frac{1}{N} - \frac{2}{N} \int_{x=1}^N (1 - x/N)e^{-x/T} \approx 1 - \frac{2}{N} \int_{x=1}^N e^{-x/T} \approx 1 - 2T/N \approx 0.9$ (Erreur de 10% !)
- pour le multifractal : $\frac{E[V(X)]}{\lambda^2 \ln(T)} \approx 0.8$ (Erreur de 20% !)

Ces exemples montrent l'importance de travailler avec des estimateurs non biaisés pour évaluer les divers paramètres (on abordera dans la suite du cours le problème de l'estimation des paramètres du modèle MRW : il existe par exemple des estimateurs simples et non biaisés de λ^2).

Estimation des corrélations

On considère la fonction de corrélations empirique $C_e(j)$ donnée par :

$$C_e(j) = \frac{1}{N-j} \frac{\sum_{k=1}^{N-j} (x_k - \bar{x})(x_{k+j} - \bar{x})}{V(x)}$$

Les fonctions C_e vérifient :

$$\sum_{j=1}^N \left(1 - \frac{j}{N}\right) C_e(j) = -\frac{1}{2}.$$

Empiriquement, on trouve des corrélations négatives ! (sur les figures suivantes, on compare les corrélations empiriques et théoriques pour les O-U et le multifractal)

Corrélations empiriques et théoriques de l'Ornstein-Uhlenbeck

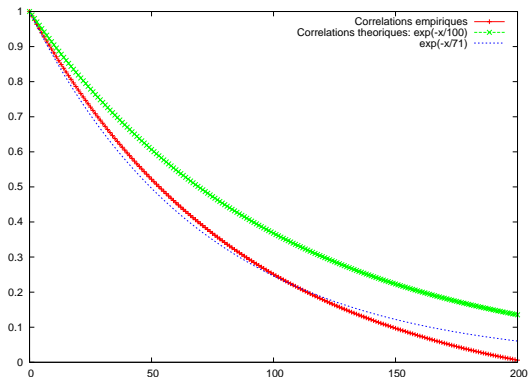


FIGURE: Corrélations empiriques typiques pour une série de taille $N=1750$ (7 ans) avec un O-U de paramètre $T=100$

Corrélations empiriques et théoriques du multifractal

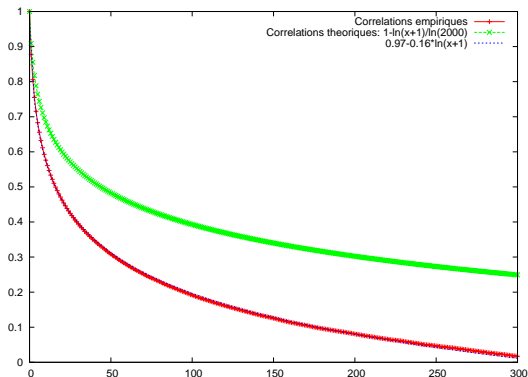


FIGURE: Corrélations empiriques typiques pour une série de taille $N=1750$ (7 ans) avec un multifractal de paramètre $\lambda^2 = 0.02$ et $T=2000$

Livres et articles généraux sur l'econophysics et la finance empirique :

- **Bouchaud, Potters** : *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing*, Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- **Cont** : Empirical properties of asset returns : stylized facts and statistical issues, *Quantitative Finance*, **1** no.2 (2001), 223-236.
- **Dacorogna, Gencay, Muller, Olsen, Pictet** : *An Introduction to High-Frequency Finance*, Academic Press (2001).
- **Cizeau, Gopikrishnan, Liu, Meyer, Peng, Stanley** : Statistical properties of the volatility of price fluctuations, *Physical Review E*, **60** no.2 (1999), 1390-1400.

Quelques livres et articles sur les modèles multifractaux (généralisation de MRW ou autres modèles) :

- **Bacry, Kozhemyak, Muzy** : Continuous cascade models for asset returns, available at www.cmap.polytechnique.fr/bacry/biblio.html, to appear in *Journal of Economic Dynamics and Control*.
- **Bacry, Muzy** : Log-infinitely divisible multifractal process, *Communications in Mathematical Physics*, **236** (2003), 449-475.
- **Calvet, Fisher** : *Multifractal Volatility : Theory, Forecasting, and Pricing*, Academic Press (2008).
- **Duchon, Robert, Vargas** : Forecasting volatility with the multifractal random walk model, to appear in *Mathematical Finance*.

Articles sur l'effet Levier :

- **Bouchaud, Matacz, Potters** : Leverage Effect in Financial Markets : The Retarded Volatility Model, *Phys. Rev. Lett.*, **87** (2001), 228701.
- **Bouchaud, Pochart** : The skewed multifractal random walk with applications to option smiles, *Quantitative Finance*, **2** (2002), 303–314.
- **Bacry, Duvernet, Muzy** : travail en cour.

Livres et articles autour des travaux de Mandelbrot :

- **Mandelbrot, Taylor** : On the distribution of stock price differences, *Operations Research*, **15** (1967), 1057-1062.
- **Mandelbrot** : A possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy in intermittent turbulence, *Statistical Models and Turbulence*, La Jolla, CA, Lecture Notes in Phys. no. 12, Springer, (1972), 333-351.
- **Mandelbrot** : *Fractals and Scaling in Finance*, Springer-Verlag (1997).
- **Borland, Bouchaud, Muzy, Zumbach** : The Dynamics of Financial Markets - Mandelbrot's Multifractal Cascades, and Beyond, *Wilmott magazine*.