Théorie du chaos multiplicatif et application à l'étude de la mesure MRM lognormale

15 novembre 2010

Table des matières

Définition d'un vecteur gaussien

Définition

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_n)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est un vecteur gaussien si pour tout vecteur $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$ est une variable gaussienne.

En particulier, pour tout i, la variable aléatoire X_i est une variable gaussienne : attention, la réciproque n'est pas vrai !

On introduit :

- le vecteur des espérances $\mu = (E[X_i])_{1 \leq i \leq n}$.
- le vecteur des covariances $K = (E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)])_{1 \leq i,j \leq n}$.

Définition d'un processus gaussien

Proposition

Le vecteur gaussien $X = (X_1, \cdots, X_n)$ *a pour transformée de Fourier :*

$$E[e^{i\xi.X}] = e^{i\xi.\mu - \frac{1}{2}{}^t\xi K \xi}, \quad \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n).$$

Définition

Un processus aléatoire $X = (X_t)_{t \in I}$ *est un processus gaussien si pour tout sous ensemble* $(t_1, \cdots, t_n)$ *de* I*, le vecteur* $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ *est un vecteur gaussien.*

Noyaux de type positif

Définition

Une matrice $(K_{i,j})_{1\leq i,j,\leq n}$ *est de type positive si pour tout vecteur* $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ *on a :*

$$ {}^t\xi K \xi = \sum_{1\leq i,j \leq n} K_{i,j}\xi_i\xi_j \geq 0. $$

Définition

Une noyau $(K(s,t))_{s,t\in I}$ *est une fonction* $K : I \times I \to \mathbb{R}$. *Un noyau est de type positif si pour tout sous ensemble* $(t_1, \cdots, t_n)$ *de* I, *la matrice* $(K(t_i, t_j))_{1\leq i,j,\leq n}$ *est de type positive.*

Noyaux de type positif et processus gaussiens

Il est facile de vérifier que pour tout vecteur gaussien X, la matrice de covariance $K = (E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)])_{1 \leq i,j \leq n}$ est de type positive. Nous admettrons la réciproque suivante (énoncée de manière très générale pour les processus) :

Théorème

Un noyau $K : I \times I \to \mathbb{R}$ est type positif si et seulement si il existe un processus gaussien $X = (X_i)_{i \in I}$ centré tel que :

$$\forall s, t \in I, \quad K(s,t) = E[X_s X_t].$$

Indépendance des composantes d'un vecteur gaussien

Dans le cas gaussien, il est extrêmement facile de vérifier l'indépendance de deux variables :

Proposition

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ *un vecteur gaussien centré. Les vecteurs* $(X_{i_1}, \cdots, X_{i_k})$ *et* $(X_{j_1}, \cdots, X_{j_{k'}})$ *sont indépendants si et seulement si :*

$$\forall l, l' \quad E[X_{i_l} X_{j_{l'}}] = 0.$$

Intégration par partie d'un vecteur gaussien

La formule suivante (IPP) est d'une grande utilité pour faire des calculs avec un vecteur gaussien :

Proposition (Intégration par parties)

Soit $X = (Z, X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur gaussien centré et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^1. Alors, on a :

$$E[ZF(X_1, \cdots, X_n)] = \sum_{i=1}^{n} E[ZX_i] E[\frac{\partial F}{\partial x_i}(X_1, \cdots, X_n)]$$

De cette formule, on va déduire les principes de comparaisons suivants :

Principes de comparaison

Proposition

Soit deux vecteurs gaussiens $X = (X_1, \cdots, X_n)$ *et* $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ *centrés tels que :*

$$\forall i, j \; E[X_i X_j] \leq E[Y_i Y_j].$$

Alors, pour tout vecteur $(p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$ *et toute fonction convexe* φ*, on a :*

$$E[\varphi(\sum_{i=1}^{n} p_i e^{X_i - \frac{E[X_i^2]}{2}})] \leq E[\varphi(\sum_{i=1}^{n} p_i e^{Y_i - \frac{E[Y_i^2]}{2}})]$$

Principes de comparaison

Corollaire

Soit deux vecteurs gaussiens $X = (X_1, \cdots, X_n)$ *et* $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ *centrés tels que :*

- $\forall i, \qquad E[X_i^2] = E[Y_i^2].$
- $\forall i \neq j, \quad E[X_i X_j] \leq E[Y_i Y_j].$

Alors, pour toute fonction croissante $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$*, on a :*

$$E[F(\sup_{1 \leq i \leq n} Y_i)] \leq E[F(\sup_{1 \leq i \leq n} X_i)].$$

Noyaux de type σ-positif

La théorie du chaos multiplicatif gaussien a été élaboré par J.P. Kahane dans l'article fondateur : Sur le chaos multiplicatif, *Annales Scientifiques et Mathematiques Quebec*). C'est une théorie générale dont le modèle limite lognormal est un cas particluier. Cette théorie s'appuie sur la notion de noyau de type σ-positif :

Définition

Soit $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *un noyau généralisé. On dit que* K *est un noyau de type* σ*-positif si il existe une suite de noyaux* $K_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ **positifs**, **de type positif** *et* **continus** *tels que :*

$$\forall s, t, \quad K(s,t) = \sum_{n \geq 1} K_n(s,t).$$

Noyaux de type σ-positif : quelques remarques

Remarque

La décomposition d'un noyau de type σ-positif en somme de noyaux K_n n'est pas nécessairement unique : il peut exister une autre suite $(K'_n)_{n\geq 1}$ tel que $K = \sum_{n\geq 1} K'_n$

Remarque

Comme chaque K_n est de type positif, par les résultats de la section précédente, on peut considérer un processus gaussien centré $(X_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ tel que X_n a pour covariance le noyau K_n. Si on suppose les processus X_n indépendants alors $X_1 + \cdots + X_n$ a pour covariance $K_1 + \cdots K_n$.

Théorie du chaos multiplicatif gaussien de Kahane

On peut énoncer la définition (théorème) qui définit le chaos multiplicatif :

Définition (Théorème, Kahane, 88)

*Soit K un noyau de type σ-positif qui s'exprime comme somme de noyaux K_n (**positifs**, **de type positif** et **continus**). Soit X_n des processus gaussiens indépendants de covariance K_n. Si l'on note $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ alors la suite de mesures aléatoires m_n définies par :*

$$m_n(A) = \int_A e^{Y_n(x) - \frac{E[Y_n(x)]}{2}} dx, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

converge p.s. vers une mesure aléatoire m. La loi de la mesure m ne dépend pas de la décompostion $(K_n)_{n \geq 1}$. On appelle m le chaos multiplicatif gaussien associé à K.

Une application du chaos multiplicatif gaussien : la MRM lognormale

La mesure MRM (Multifractal Random measure) lognormale est le chaos multiplicatif gaussien associé au noyau $K(s,t) = \lambda^2 \ln^+(\frac{T}{|t-s|})$. Il n'est pas immédiat de vérifier que $\ln^+ \frac{T}{|.|}$ est de type σ-positif. Nous allons utiliser la construction en cône pour définir la MRM. Cette construction fait appel à la notion de mesure gaussienne sur un espace mesuré :

Définition

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ un sous ensemble borélien de $\mathbb{R}^d$. On considère une mesure ν sur B. On appelle mesure gaussienne associée à ν le champ gaussien centré $(X(A))_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{A})}$ de covariance :

$$E[X(A)X(B)] = \nu(A \cap B).$$

Une application du chaos multiplicatif gaussien : la MRM lognormale

On introduit μ la mesure gaussienne sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ associée à la mesure

$$\nu(ds, dy) = \frac{dsdy}{y^2}.$$

On definit le cône $C(t)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$:

$$C(t) = \{(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \ |t - s| \leq \frac{y \wedge T}{2}\}.$$

On definit également le cône tronqué $C_\epsilon(t)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$:

$$C_\epsilon(t) = \{(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \ \epsilon < |t - s| \leq \frac{y \wedge T}{2}\}.$$

Une application du chaos multiplicatif gaussien : la MRM lognormale

On introduit le champ gaussien $\omega^\epsilon(t) = \mu(C_\epsilon(t))$. Il est facile de vérifier que ω^ϵ est un processus gaussien centré de corrélations :

$$E[\omega_s^\epsilon \omega_t^\epsilon] = \begin{cases} (\ln \frac{T}{\epsilon} + 1 - \frac{|t-s|}{\epsilon}) & \text{pour } |t-s| \leq \epsilon, \\ \ln^+ \frac{T}{|t-s|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit donc la MRM lognormale $M = \lim_{\epsilon \to 0} M_\epsilon$ avec :

$$M_\epsilon[0,t] = \sigma \int_{[0,t]} e^{\lambda \omega_s^\epsilon - \frac{\lambda^2}{2} E[(\omega_s^\epsilon)^2]} ds, \quad t \geq 0$$

Quelques propriétés de la MRM lognormale : non dégérescence de la limite

Nous admettrons le résultat suivant :

Théorème (Kahane, 1985)

La mesure aléatoire M est différente de 0 si et seulement si $\lambda^2 < 2$.

Dans ce qui suit, on suppose que $\lambda^2 < 2$.

Quelques propriétés de la MRM lognormale : invariance d'échelle stochastique

Théorème (Invariance d'échelle stochastique)

La mesure M satisfait une propriété d'invariance d'échelle généralisée. Si $c < 1$, alors on a :

$$(M[0,ct])_{0 \leq t \leq T} \underset{(distribution)}{=} c e^{\Omega_{1/c} - \frac{\lambda^2}{2} \ln \frac{1}{c}} (M[0,t])_{0 \leq t \leq T},$$

où $\Omega_{1/c}$ est une variable gaussienne centrée de variance $\lambda^2 \ln(\frac{1}{c})$ et indépendante de M.

Une forme de cette équation fut en premier découverte en 1990 dans le cadre de la turbulence (Castaing, Gagne, Hopfinger : Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence, *Physica D*).

Quelques propriétés de la MRM lognormale : existence de moments et intermittence

On introduit la fonction de structure ζ :

$$\zeta(q) = (1 + \frac{\lambda^2}{2})q - \frac{\lambda^2}{2}q^2$$

Corollaire

Pour tout $t < T$ et $q \in \mathbb{R}_+$,

$$E[M[0,t]^q] = (\frac{c}{T})^{\zeta(q)} E[M[0,T]^q],$$

Nous admettrons que pour $q > 1$, on a $E[M[0,T]^q] < \infty$ si et seulement si $\zeta(q) > 1$.

Quelques propriétés de la MRM lognormale : invariance d'échelle intégrale

Théorème (Invariance d'échelle intégrale)

La mesure M satisfait une propriété d'invariance d'échelle généralisée par changement du paramètre de cutoff. Si $T < T'$, alors on a :

$$(M^{T'}[0,t])_{0 \le t \le T} \underset{(distribution)}{=} e^{\Omega_{T'/T} - \frac{\lambda^2}{2} \ln \frac{T'}{T}} (M^{T}[0,t])_{0 \le t \le T},$$

où $\Omega_{T'/T}$ est une gaussienne centrée de variance $\lambda^2 \ln(\frac{T'}{T})$ et indépendante de M.

Conséquence : si la fenêtre d'observation de M^T est de longueur inférieure à T alors il est impossible de déterminer σ et T (Problème mal posé).
Idée : faire tendre $T \to \infty$ pour se débarasser de σ et T !