Introduction au pricing des options européennes

4 janvier 2012

Table des matières

Pricing d'option par minimisation de la variance

Dans cette section, on considère que l'on observe le prix $(S_n)_{0 \leq n \leq T}$ à dates fixes et que ce prix est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq T}$ (information disponibe). On fait les hypothèses suivantes par simplification :

- $(S_n)_{0 \leq n \leq T}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq T}$.
- Le taux d'intérêt (riskless rate) r est nul.

Quelques Exemples : le modèle additif

Modèles additifs : sous une forme très générale, on choisit

$$S_j - S_{j-1} = S_0 \sigma_j \epsilon_j$$

où $(\epsilon_j)_{j\geq 1}$ est un bruit i.i.d. centré de variance 1 et $(\sigma_j)_{j\geq 1}$ un processus de volatilité avec pour tout j, ϵ_j indépendant de $(\sigma_k)_{k\leq j}$.

Remarque

Dans le modèle additif, on ne suppose pas que $(\epsilon_j)_{j\geq 1}$ et $(\sigma_j)_{j\geq 1}$ sont indépendants afin de construire des modèles avec effet Levier.

Quelques Exemples : le modèle additif

Voici quelques exemples de modèles sur σ_j que l'on peut considérer :

- Bachelier : $\sigma_j = \sigma$.
- Volatilité locale : $\sigma_j = \sigma(S_{j-1})$ où $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Multifractal avec Levier : $\sigma_j = \sigma(e^{\omega_j - E[\omega_j^2]} - \beta \sum_{k=-\infty}^{j-1} e^{-\alpha(n-k)} \epsilon_k)$, où $(\omega_j)_{j\geq 1}$ est un processus gaussien centré de covariance $E[\omega_i \omega_j] = \lambda^2 \ln^+ \frac{T}{|j-i|+1}$.

Quelques Exemples : le modèle multiplicatif

Modèles multiplicatifs : sous une forme très générale, on choisit

$$S_j - S_{j-1} = S_{j-1}\sigma_j\epsilon_j$$

où $(\epsilon_j)_{j\geq 1}$ est un bruit i.i.d. centré de variance 1 et $(\sigma_j)_{j\geq 1}$ un processus de volatilité avec pour tout j, ϵ_j indépendant de $(\sigma_k)_{k\leq j}$.

Remarque

On peut considérer les mêmes modèles sur σ_j que dans le cas additif.

Quelques Exemples : le modèle multiplicatif

- Black-Scholes : $\sigma_j = \sigma$.
- Volatilité locale : $\sigma_j = \sigma(S_{j-1})$ où $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Multifractal avec Levier :
  $\sigma_j = \sigma(e^{\omega_j - E[\omega_j^2]} - \beta \sum_{k=-\infty}^{j-1} e^{-\alpha(n-k)} \epsilon_k)$, où $(\omega_j)_{j \geq 1}$ est un processus gaussien centré de covariance
  $E[\omega_i \omega_j] = \lambda^2 \ln^+ \frac{T}{|j-i|+1}$.

Définition d'un portefeuille auto-financé

Un portefeuille auto financé $(\pi_j^1, \pi_j^2)_{0 \leq j \leq T}$ est un processus adapté à $(\mathcal{F}_j)_{0 \leq j \leq T}$ qui vérifie l'équation d'équilibre des flux financiers :

$$\pi_{j-1}^1 + \pi_{j-1}^2 S_j = \pi_j^1 + \pi_j^2 S_j, \quad j = 1 \ldots T$$

On considère alors le processus de richesse $(V_j)_{0 \leq j \leq T}$ associé :

$$V_j = \pi_j^1 + \pi_j^2 S_j, \quad j = 1 \ldots T$$

Définition d'un portefeuille auto-financé

Proposition

Pour tout portefeuille auto-financé, on a l'expression suivante (intégrale) :

$$V_j = V_0 + \sum_{k=1}^{j} \pi^2_{k-1}(S_k - S_{k-1}), \quad j = 1 \dots T$$

Prix d'une option européenne

Dans ce cas, le prix de vente équitable c d'une option pour quelqu'un qui se couvre avec le portefeuille $(\pi_j^1, \pi_j^2)_{0 \leq j \leq T}$ est tel que en moyenne celui-ci ne gagne rien :

$$E[c + \sum_{k=1}^{T} \pi_{k-1}^2 (S_k - S_{k-1}) - (S_T - K)_+] = 0$$

$$\Rightarrow c = E[(S_T - K)_+ - \sum_{k=1}^{T} \pi_{k-1}^2 (S_k - S_{k-1})] = E[(S_T - K)_+].$$

c est donc indépendant du portefeuille : on peut donc définir un prix non ambigu.

Portefeuille qui minimise la variance

Dans le cadre ci-dessus, supposons qu'un agent trouve un acheteur de l'option au prix de vente $c \geq E[(S_T - K)_+]$. Le vendeur de l'option a intérêt à minimiser le risque associé à la vente de l'option. Nous choisirons comme mesure de risque la plus simple qui permette de faire des calculs, à savoir le risque quadratique. Dans ce cadre, le vendeur cherche le portefeuille auto-financé $(\pi_j^1, \pi_j^2)_{0 \leq j \leq T}$ qui minimise :

$$\inf_{(\pi_j^2)} E[(c + \sum_{k=1}^{T} \pi_{k-1}^2 (S_k - S_{k-1}) - (S_T - K)_+)^2].$$

Portefeuille qui minimise la variance

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Théorème

Il existe un portefeuille $(\pi_j^2)_{0 \leq j \leq T}$ *solution du problème de minimisation ci-dessus. Celui-ci est donné par :*

$$\pi_{j-1}^2 = \frac{E[(S_T - K)_+(S_j - S_{j-1})|\mathcal{F}_{j-1}]}{E[(S_j - S_{j-1})^2|\mathcal{F}_{j-1}]}.$$

Quelques Exemples de hedge

Modèle de Black-Scholes : c'est un modèle multiplicatif $S_j - S_{j-1} = S_{j-1}\sigma\epsilon_j$. On note :

$$\pi^2_{j-1}(x) = \frac{E[(S_T - K)_+(S_j - S_{j-1})|S_{j-1} = x]}{E[(S_j - S_{j-1})^2|S_{j-1} = x]}.$$

On a alors :

Proposition (Hedge dans B.S. discret)

$$\pi^2_{j-1}(x) = E[\prod_{k=j+1}^{T}(1 + \sigma\epsilon_k)1_{\prod_{k=j}^{T}(1+\sigma\epsilon_k) > \frac{K}{x}}]$$

Portefeuille qui minimise la variance : le cas continu

Dans le cas continu, on peut étendre tous les résultats précédents sous des hypothèses similaires : le prix $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$,etc...

En particulier, on obtient la formule suivante pour le hedge optimal (sous réserve que la limite existe) :

Théorème (Hedge optimal dans le cas continu)

$$\pi_t^2 = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{E[(S_T - K)_+ (S_{t+\epsilon} - S_t) | \mathcal{F}_t]}{E[(S_{t+\epsilon} - S_t)^2 | \mathcal{F}_t]}.$$

Quelques Exemples de hedge dans le cas continu : le modèle de volatilité stochastique additif

On considère le modèle de volatilité stochastique : $dS_t = \sigma_t S_0 dB_t$ où le processus de volatilité $(\sigma_t)_{0 \le t \le T}$ est indépendant du brownien $(B_t)_{0 \le t \le T}$. On considère la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma\{S_s;\ s \le t\}$. On a alors :

Proposition (Hedge optimal dans le modèle de volatilité stochastique)

$$\pi_t^2 = E[N(\frac{S_t - K}{S_0\sqrt{\int_t^T \sigma_s^2 ds}})|\mathcal{F}_t]$$

où $N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt.$

Quelques Exemples de hedge dans le cas continu : le modèle de volatilité stochastique multiplicatif

On considère le modèle de volatilité stochastique : $dS_t = \sigma_t S_t dB_t$ où le processus de volatilité $(\sigma_t)_{0 \leq t \leq T}$ est indépendant du brownien $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$. On considère la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma\{S_s;\ s \leq t\}$. On a alors :

Proposition (Hedge optimal dans le modèle de volatilité stochastique)

$$\pi_t^2 = E[N(\frac{\ln(S_t/K) + 1/2 \int_t^T \sigma_s^2 ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma_s^2 ds}})|\mathcal{F}_t],$$

où $N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt.$

Quelques Exemples de hedge dans le cas continu : le modèle de volatilité locale

On considère le modèle de volatilité locale : $dS_t = \sigma(S_t)S_t dB_t$ où le processus de volatilité $(\sigma(S_t))_{0\leq t\leq T}$ est une fonction du prix S_t. On considère la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma\{S_s;\ s \leq t\}$. En introduisant le processus de prix $c(t,S) = E[(S_T - K)_+ | S_t = S]$, on obtient :

Proposition (Hedge optimal dans le modèle de volatilité locale)

$$\pi_t^2 = \frac{\partial c}{\partial S}(t, S_t)$$

Le rôle du drift et problèmes d'arbitrage

Dans la sections précédentes, nous avons occulté le problème du drift. Nous allons considérer le cas où le prix $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ suit (sous P^{μ}) un modèle additif :

$$S_t = S_0(1 + B_{M[0,t]} + \mu t),$$

où M est une mesure aléatoire indépendante du brownien B. Supposons dans un premier temps que l'on néglige le drift μ. On veut voir l'impact de cette erreur sur le prix d'une option à la monnaie (le strike $K = S_0$).

Remarque

Dans le cadre de la théorie mathématique sur l'absence d'arbitrage, il est impossible de donner un prix à une option dont le sous-jacent vérifie l'équation ci-dessus. Néanmoins, cette théorie est irréaliste sur un plan pratique.

Le rôle du drift et problèmes d'arbitrage

On suppose donc que l'on néglige le drift et que l'on hedge avec le portefeuille optimal au sens de la variance. Rappelons que le prix de l'option P et le portefeuille optimal $(\pi_t^2)_{0 \leq t \leq T}$ ont pour expression :

- $P = \frac{S_0 E[\sqrt{M[0,T]}]}{\sqrt{2\pi}}$.
- $\pi_t^2 = E[N(\frac{S_t - K}{S_0\sqrt{M[t,T]}})|\mathcal{F}_t]$.

Preuve : Etude du rôle du drift

On peut montrer que le prix de l'option est indépendante du drift ! Si l'on suppose que $M[0,t] = \sigma^2 t$ (Bachelier) alors il est possible de montrer que l'on a un hedge parfait (miracle !) :

$$(S_T - S_0)_+ = \int_0^T \pi_t^2 dS_t, \quad p.s.$$

Formule du smile : les premiers cumulants d'une variable aléatoire

Si X est une variable aléatoire centrée ($E[X] = 0$), on introduit les 3 premiers cumulants :

- l'écart type : $\overline{\sigma}^2 = E[X^2]$.
- la skewness : $\mathcal{S} = \frac{E[X^3]}{\overline{\sigma}^3}$ (mesure de la dissymétrie des queues de distribution).
- la kurtosis : $\kappa = \frac{E[X^4]}{\overline{\sigma}^4} - 3$ (mesure du poids des queues de distribution).

Remarque

Dans le cas de la gaussienne, on a $\mathcal{S} = 0$ et $\kappa = 0$.

Formule du smile : approximation gaussienne (Edgeworth expansion)

On note $N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$ (et $\overline{N}(x) = 1 - N(x)$). On obtient le développement suivant lorsque $\mathcal{S} << 1$ et $\kappa << 1$:

Proposition (Edgeworth expansion)

$$P(\frac{X - E[X]}{\overline{\sigma}} > x) - \overline{N}(x) \approx \frac{\mathcal{S}}{6} N^{(3)}(x) - \frac{\kappa}{24} N^{(4)}(x).$$

Formule du smile pour les modèles additifs

On suppose que l'on travaille avec un modèle additif $(S_t)_{t\geq 1}$:

$$S_t = S_0(1 + r_1 + \ldots + r_t)$$

où la suite $(r_t)_{t\geq 1}$ est une suite stationnaire centrée de variance σ^2 de corrélation nulle : si $s \neq t$ alors $E[r_s r_t] = 0$.
On veut relier le prix des options avec $(S_t)_{t\geq 1}$ au prix des options avec le modèle de Bachelier $(S_t^{BS})_{t\geq 1}$:

$$S_t^{BS} = S_0(1 + r_1 + \ldots + r_t)$$

où la suite $(r_t)_{t\geq 1}$ est une suite i.i.d. normale centrée de variance σ_{BS}^2.

Formule du smile pour les modèles additifs

Dans le cas des options de strike K et de maturité T (payoff $(S_T - K)_+$), on introduit la moneyness $\mathcal{M} = \frac{K - S_0}{\sigma\sqrt{T}S_0}$. On note $\mathcal{S}_T$ et κ_T la skewness et la kurtosis de la variable $\frac{S_T - S_0}{S_0}$. Remarquons que la variance de $\frac{S_T - S_0}{S_0}$ est $\sigma^2 T$.
On obtient alors la formule du smile :

Proposition (Bouchaud, Potters)

On a l'égalité des prix $E[(S_T - K)_+] \approx E[(S_T^{BS} - K)_+]$ si l'on a la relation :

$$\sigma_{BS} = \sigma(1 + \frac{\mathcal{S}_T}{6}\mathcal{M} + \frac{\kappa_T}{24}(\mathcal{M}^2 - 1))$$

Preuve : Hedge optimal dans le modèle de volatilité stochastique

On a :

$$\frac{E[(S_T - K)_+(S_{t+\epsilon} - S_t)|\mathcal{F}_t]}{E[(S_{t+\epsilon} - S_t)^2|\mathcal{F}_t]}$$

$$= \frac{E[(S_T/S_t - K/S_t)_+(S_{t+\epsilon}/S_t - 1)|\mathcal{F}_t]}{E[(S_{t+\epsilon}/S_t - 1)^2|\mathcal{F}_t]}$$

$$\frac{E[(e^{\int_t^T \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 ds} - K/S_t)_+(e^{\int_t^{t+\epsilon} \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_t^{t+\epsilon} \sigma_s^2 ds} - 1)|\mathcal{F}_t]}{E[(e^{\int_t^{t+\epsilon} \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_t^{t+\epsilon} \sigma_s^2 ds} - 1)^2|\mathcal{F}_t]}$$

$$\underset{\epsilon \to 0}{\sim} \frac{E[(e^{\int_t^T \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 ds} - K/S_t)_+(\int_t^{t+\epsilon} \sigma_s dW_s)|\mathcal{F}_t]}{E[(\int_t^{t+\epsilon} \sigma_s dW_s)^2|\mathcal{F}_t]}$$

Preuve : Hedge optimal dans le modèle de volatilité stochastique

On a alors en utilisant la formule d'IPP avec $F(x) = (e^x - K/S_t)_+$ $(F'(x) = e^x 1_{e^x > K/S_t})$ puis Girsanov :

$$\frac{E[(e^{\int_t^T \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 ds} - K/S_t)_+ (\int_t^{t+\epsilon} \sigma_s dW_s) | \mathcal{F}_t]}{E[(\int_t^{t+\epsilon} \sigma_s dW_s)^2 | \mathcal{F}_t]}$$

$$= \frac{E[(\int_t^{t+\epsilon} \sigma_s dW_s)^2 | \mathcal{F}_t] E[e^{\int_t^T \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 ds} 1_{e^{\int_t^T \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 ds} > K/S_t} | \mathcal{F}_t]}{E[(\int_t^{t+\epsilon} \sigma_s dW_s)^2 | \mathcal{F}_t]}$$

$$= E[e^{\int_t^T \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 ds} 1_{e^{\int_t^T \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 ds} > K/S_t} | \mathcal{F}_t]$$

$$= P(e^{\int_t^T \sigma_s dW_s + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 ds} > K/S_t | \mathcal{F}_t)$$

Preuve : Hedge optimal dans le modèle de volatilité locale

On a en utilisant l'approximation
$S_{t+\epsilon} - S_t \underset{\epsilon \to 0}{\sim} S_t \sigma(S_t)(W_{t+\epsilon} - W_t)$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{E[(S_T - K)_+ (S_{t+\epsilon} - S_t) | \mathcal{F}_t]}{E[(S_{t+\epsilon} - S_t)^2 | \mathcal{F}_t]} \\
&= \frac{E[c(t+\epsilon, S_{t+\epsilon})(S_{t+\epsilon} - S_t) | S_t]}{E[(S_{t+\epsilon} - S_t)^2 | S_t]} \\
&\underset{\epsilon \to 0}{\sim} \frac{E[c(t+\epsilon, S_{t+\epsilon}) S_t \sigma(S_t)(W_{t+\epsilon} - W_t) | S_t]}{E[S_t^2 \sigma(S_t)^2 (W_{t+\epsilon} - W_t)^2 | S_t]} \\
&\underset{\epsilon \to 0}{\sim} \frac{E[c\big(t+\epsilon, S_t + S_t \sigma(S_t)(W_{t+\epsilon} - W_t)\big)(W_{t+\epsilon} - W_t) | S_t]}{S_t \sigma(S_t) \epsilon}
\end{aligned}
$$

Preuve : Hedge optimal dans le modèle de volatilité locale

On fait alors un développemet de Taylor autour de (t, S_t) :

$$\frac{E[c\big(t+\epsilon, S_t + S_t\sigma(S_t)(W_{t+\epsilon} - W_t)\big)(W_{t+\epsilon} - W_t)|S_t]}{S_t\sigma(S_t)\epsilon} \underset{\epsilon \to 0}{\sim}$$

$$\frac{E[\big(c(t,S_t) + \epsilon\frac{\partial c}{\partial t}(t,S_t) + \frac{\partial c}{\partial S}(t,S_t)S_t\sigma(S_t)(W_{t+\epsilon} - W_t)\big)(W_{t+\epsilon} - W_t)|S}{S_t\sigma(S_t)\epsilon}$$

$$= \frac{\partial c}{\partial S}(t, S_t)$$

Preuve : Etude du rôle du drift

On rappelle que l'on a l'expression explicite suivante pour π_t^2 comme fonction de $(S_s)_{s \leq t}$:

$$\begin{aligned}
\pi_t^2 &= E[N(\frac{S_t - S_0}{S_0\sqrt{M[t,T]}})|\mathcal{F}_t] \\
&= E[\overline{N}(\frac{S_0 - S_t}{S_0\sqrt{M[t,T]}})|S_t, (< S >_s)_{s \leq t}]
\end{aligned}$$

Preuve : Etude du rôle du drift

On peut calculer l'espérance conditionnelle ci-dessus sous P^μ et on remarque qu'elle peut s'écrire :

$$E^\mu[\overline{N}(\frac{S_0 - S_t}{S_0\sqrt{M[t,T]}})|S_t, (< S >_s)_{s\leq t}] = F(S_t, (< S >_s)_{s\leq t})$$

où la fonction F est indépendante du drift μ.

Preuve : Etude du rôle du drift

Dans ce cas, le payoff moyen de l'option est donné par (N désigne une gaussienne standard) :

$$
\begin{aligned}
& E^{\mu}[(S_T - S_0)_+ - \int_0^T \pi_t^2 dS_t] \\
& = E^{\mu}[(S_T - S_0)_+ - \int_0^T F(S_t, (< S >_s)_{s \leq t}) dS_t] \\
& = S_0 E[(B_{M[0,T]} + \mu T)_+] - S_0 \int_0^T E[\overline{N}(\frac{-\mu t - B_{M[0,t]}}{\sqrt{M[t,T]}})] \mu dt \\
& = S_0 E[(B_{M[0,T]} + \mu T)_+] - S_0 \int_0^T P(B_{M[0,T]} + \mu t > 0) \mu dt \\
& = S_0 E[(B_{M[0,T]})_+]
\end{aligned}
$$

Preuve : approximation gaussienne et Edgeworth expansion

En utilisant la Edgeworth expansion, on obtient (on note Y une gaussienne centrée réduite) :

$$
\begin{aligned}
E[(X-\overline{K})_+] &= \int_{\overline{K}}^{\infty} P(X>u)du \\
&= \overline{\sigma} \int_{\frac{\overline{K}}{\overline{\sigma}}}^{\infty} P(\frac{X}{\overline{\sigma}}>v)dv \\
&= E[(\overline{\sigma}Y-\overline{K})_+] + \overline{\sigma}\frac{\mathcal{S}}{6}\int_{\frac{\overline{K}}{\overline{\sigma}}}^{\infty} N^{(3)}(v)dv \\
&- \overline{\sigma}\frac{\kappa}{24}\int_{\frac{\overline{K}}{\overline{\sigma}}}^{\infty} N^{(4)}(v)dv
\end{aligned}
$$

Preuve : approximation gaussienne et Edgeworth expansion

On a donc :

$$\begin{aligned}
&E[(X-\overline{K})_+] \\
&= E[(\overline{\sigma}Y-\overline{K})_+] - \overline{\sigma}\frac{\mathcal{S}}{6}N^{(2)}(\frac{\overline{K}}{\overline{\sigma}}) + \overline{\sigma}\frac{\kappa}{24}N^{(3)}(\frac{\overline{K}}{\overline{\sigma}}) \\
&= E[(\overline{\sigma}Y-\overline{K})_+] + \overline{\sigma}\frac{\mathcal{S}}{6}\frac{\overline{K}}{\overline{\sigma}}\frac{e^{-\frac{\overline{K}^2}{2\overline{\sigma}^2}}}{\sqrt{2\pi}} + \overline{\sigma}\frac{\kappa}{24}\frac{e^{-\frac{\overline{K}^2}{2\overline{\sigma}^2}}}{\sqrt{2\pi}}(\frac{\overline{K}^2}{\overline{\sigma}^2}-1),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $N^{(2)}(x) = -\frac{xe^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ et $N^{(3)}(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}(x^2-1)$.

Preuve : formule du smile

On note :

$$F(\sigma) = E[(\sigma Y - \overline{K})_+] = \int_{\frac{\overline{K}}{\sigma}}^{\infty} (\sigma x - \overline{K}) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

On obtient la formule $F'(\sigma) = \frac{e^{-\frac{\overline{K}^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}}$ et donc :

$$E[((\sigma + \delta\sigma) Y - \overline{K})_+] \approx E[(\sigma Y - \overline{K})_+] + \delta\sigma \frac{e^{-\frac{\overline{K}^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Preuve : formule du smile

On obtient donc l'égalité suivante :

$$E[(\overline{\sigma}_{BS}Y - \overline{K})_+] \approx E[(X - \overline{K})_+]$$

où l'on a la relation :

$$\overline{\sigma}_{BS} = \overline{\sigma}(1 + \frac{\mathcal{S}}{6}\frac{\overline{K}}{\overline{\sigma}} + \frac{\kappa}{24}(\frac{\overline{K}^2}{\overline{\sigma}^2} - 1))$$

Preuve : formule du smile pour les modèles additifs

On note $\overline{K} = \frac{K - S_0}{S_0}$. On reécrit le prix des options :

- $E[(S_T - K)_+] = S_0 E[(X - \overline{K})_+]$ avec $X = \frac{S_T - S_0}{S_0}$ (rappel : $E[X^2] = \sigma^2 T$).
- $E[(S_T^{BS} - K)_+] = S_0 E[(\sigma_{BS}\sqrt{T} Y - \overline{K})_+]$ avec Y une gaussienne centrée réduite.

On obtient alors la formule du smile par la correspondance :

$$\overline{\sigma} \leftrightarrow \sigma\sqrt{T}, \ \ \overline{\sigma}_{BS} \leftrightarrow \sigma_{BS}\sqrt{T}.$$