Le corrigé des exercices

Yi Shan

April 8, 2024

1 Feuille d'exercices 1

Réponse d'exercice 1.1. (1) Soit $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ tel que $\vec{v}_1 = \lambda\vec{u}$ et $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$. On prend le produit scalaire avec $\vec{u}$ et obtien que

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} \mid \lambda\vec{u} + \vec{v}_2 \rangle = \lambda \langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle.$$

Donc $\lambda = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle}$ et on peut écrire

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 = \frac{\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle}\vec{u}, \vec{v}_2 = \vec{v} - \frac{\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle}\vec{u}.$$

Il est facile de vérifier que $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ satisfont les conditions désirées et cette manière d'écrire est unique.
(2) On définie les applications:

$$p(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle}\vec{u},\ s(\vec{v}) = \frac{2\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle}\vec{u} - \vec{v}.$$

Elles sont des endomorphismes de $\mathcal{P}$ car le produit scalaire est bilinéaire.
(3) Par notre formule pour p, on a $\|\vec{v} - p(\vec{v})\| = \|\vec{v}_2\|$. Pour tout $\vec{w} \in \mathrm{Vect}\{\vec{u}\}$,

$$\|\vec{v} - \vec{w}\| = \|\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{w}\| = \|(\vec{v}_1 - \vec{w}) + \vec{v}_2\| = \sqrt{\|\vec{v}_1 - \vec{w}\|^2 + \|\vec{v}_2\|^2} \geq \|\vec{v}_2\|$$

car $\vec{v}_1 - \vec{w} \in \mathrm{Vect}(\vec{u})$ est orthogonal à $\vec{v}_2$.
(4) Maintenant $\vec{u} = (1,2)^T$.
(a) Quand $\vec{v} = (1,1)^T$, $p(\vec{v}) = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5})^T$ et $s(\vec{v}) = (\frac{1}{5}, \frac{7}{5})^T$.
(b) On se donne $\vec{v} = (x,y)^T$, donc

$$p(\vec{v}) = \frac{x+2y}{5}\vec{u} = \begin{pmatrix} (x+2y)/5 \\ (2x+4y)/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et alors $P = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$. Comme $s(\vec{v}) = 2p(\vec{v}) - \vec{v}$, on a $S = 2P - \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$.
(c) $P^2 = P$ et $S^2 = \mathrm{I}_2$. Le résultat n'est pas surprenant car p est la projection d'un vecteur sur le sous-espace $\mathrm{Vect}(\vec{u})$, et s est la réflexion par rapport à l'axe $\mathrm{Vect}(\vec{u})$.

Réponse d'exercice 1.2.

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= u \cdot u = 2^2 + (-5)^2 + (-1)^2 = 30, \\
\|v\|^2 &= v \cdot v = (-7)^2 + (-4)^2 + 6^2 = 101, \\
\|u+v\|^2 &= \|(-5,-9,5)^T\|^2 = 131, \\
u \cdot v &= 2 \times (-7) + (-5) \times (-4) + (-1) \times 6 = 0.
\end{aligned}$$

C'est logique parce que la définition du produit scalaire d'une norme $\| \ \|$ est

$$u \cdot v = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right).$$

Si on a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda u + \mu v = 0$, donc

$$0 = (\lambda u + \mu v) \cdot u = 30\lambda$$

et $\lambda = 0$. Par la même méthode, $\mu = 0$. Alors la famille $\{u, v\}$ est libre.

Réponse d'exercice 1.3. (1) Tautologie.
(2) Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$|\langle X \mid Y \rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\|,$$

donc

$$\|X+Y\|_2^2 = \|X\|_2^2 + \|Y\|_2^2 + 2\langle X \mid Y \rangle \leq \|X\|_2^2 + \|Y\|_2^2 + 2\|X\|_2\|Y\|_2 = (\|X\|_2 + \|Y\|_2)^2.$$

(3) Tautologie.

Réponse d'exercice 1.4. (1) Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}
\langle x+y \mid x+y \rangle &= \langle x \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle + 2\langle x \mid y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle, \\
\langle x-y \mid x-y \rangle &= \langle x \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle - 2\langle x \mid y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x \mid y \rangle, \\
\langle x+y \mid x-y \rangle &= \langle x \mid x \rangle - \langle y \mid y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2.
\end{aligned}$$

(2) Pour tout $(x, y) \in E^2$, par les résultats de la question précédente on a:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle\right) + \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x \mid y \rangle\right) = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Cette identité s'appelle l'identité du parallélogramme parce que $2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ est la somme de carrés des longueurs des quatre côtés dún parallélogramme et $\|x+y\|, \|x-y\|$ sont des longueurs de ses deux diagonales.
(3) Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}
2 + \|x+y\|^2 &\leq 2 + \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \\
&= 2\left(1 + \|x\|^2 + \|y\|^2\right) \\
&\leq 2\left(1 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\| \cdot \|y\|\right) = 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2).
\end{aligned}$$

Réponse d'exercice 1.5. (1) D'abord on montre que V est un sous-espace vectoriel de E:

- pour $x, y \in V$, $\langle x+y \mid u\rangle = \langle x \mid u\rangle + \langle y \mid u\rangle = 0$ donc $x+y$ appartient à V;
- pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda x \mid u\rangle = \lambda\langle x \mid u\rangle = 0$ donc λx appartient à V.

L'espace V et $\mathrm{Vect}\{u\}$ sont en somme directe parce que leur intersection est nulle: si $\lambda u \in V$, alors $\lambda = \frac{\langle \lambda u | u\rangle}{\langle u | u\rangle} = 0$.
(2) L'application $\varphi : E \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x \mid u\rangle$ est une forme linéaire car le produit scalaire est bilinéaire. Son noyau $\ker\varphi$ est V, donc par le théorème du rang,

$$\dim V = \dim\ker\varphi = \dim E - \dim\operatorname{im}\varphi = n - 1.$$

(3) On peut définir la projection orthogonal sur $\mathrm{Vect}\{u\}$ comme:

$$p(x) = \frac{\langle x \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle}u = \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u,$$

et la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\{u\}$ comme:

$$s(x) = 2p(x) - x = \frac{2\varphi(x)}{\varphi(u)}u - x.$$

Réponse d'exercice 1.6. On va vérifier les trois conditions dans la définition d'un produit scalaire:

- (S) Pour tout $(f, g) \in E^2$,

$$\langle g \mid f\rangle = \int_{-1}^{1} g(t)f(t)dt = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt = \langle f \mid g\rangle;$$

- (B) Pour tout $(f, g, h) \in E^3$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\langle \lambda f + \mu g \mid h\rangle &= \int_{-1}^{1} \left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right) h(t)dt \\
&= \lambda\int_{-1}^{1} f(t)h(t)dt + \mu\int_{-1}^{1} g(t)h(t)dt \\
&= \lambda\langle f \mid h\rangle + \mu\langle g \mid h\rangle, \\
\langle f \mid \lambda g + \mu h\rangle &= \int_{-1}^{1} f(t)\left(\lambda g(t) + \mu h(t)\right) dt \\
&= \lambda\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt + \mu\int_{-1}^{1} f(t)h(t)dt \\
&= \lambda\langle f \mid g\rangle + \mu\langle f \mid h\rangle;
\end{aligned}$$

- (P) Pour une fonction $f \in E$ non nulle, il existe un point $x_0 \in [-1,1]$ tel que $A := |f(x_0)| \neq 0$. Comme f est continue, on a un intervalle $I \subset [-1,1]$ de longueur $B > 0$ contenant x_0 tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \geq A/2$. Alors,

$$\langle f \mid f \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)^2 dt \geq \int_I |f(t)|^2 dt \geq (A/2)^2 \cdot B > 0,$$

  et donc le produit scalaire $\langle \ \mid \ \rangle$ est definie positif.

Réponse d'exercice 1.7. (1) L'espace $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3 parce que c'est engendré par une famille libre $\{1, X, X^2\}$.
(2) Il faut résoudre la système:

$$P(0) = c = 0, P(1) = a + b + c = 0, P(2) = 4a + 2b + c = 0.$$

La seule solution est $a = b = c = 0$.
(3) Les conditions (S) et (B) sont facile à vérifier, et on peut vérifier (P) en utilisant le résultat de la question précédente.
(4) La famille $\{1, X, X^2\}$ n'est pas orthogonale car

$$f(1, X) = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 2 = 3 \neq 0.$$

(5) Maintenant on pose

$$P_0 = (X-1)(X-2), P_1 = X(X-2), P_2 = X(X-1).$$

Comme $P_i(j) = 0$ pour tous $i \neq j \in \{0,1,2\}$, la famille $\{P_0, P_1, P_2\}$ est orthogonale. On peut calculer ses normes

$$\sqrt{f(P_0,P_0)} = |P_0(0)| = 2, \sqrt{f(P_1,P_1)} = |P_1(1)| = 1, \sqrt{f(P_2,P_2)} = |P_2(2)| = 2,$$

et obtenir une base orthonormée $\{\frac{P_0}{2}, P_1, \frac{P_2}{2}\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
(6) Similairement, on a une famille orthogonale $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par

$$P_i(X) = \prod_{j \neq i} (X - x_j), \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

La norme de P_i égale $|\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)|$, donc on a une base orthonormée:

$$\left\{ \frac{\prod_{j\neq i}(X - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} \middle| i = 0, 1 \ldots, n \right\}.$$

Réponse d'exercice 1.8.

(i) Vrai

(ii) Faux

(iii) Vrai

(iv) Vrai

(v) Vrai

(vi) Faux

(vii) Faux

(viii) Vrai

Réponse d'exercice 1.9. (1) Facile
(2) Si $\vec{u} = (x, y)^T$, alors

$$\langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle = x^2 + xy + y^2 = f_y(x).$$

(3) C'est facile de montrer que l'application $\langle \vec{u}_1 \mid \vec{u}_2 \rangle$ est symmétrique et bilinéaire. Par les questions (1) et (2), on peut obtenir que cette application est définie positive. On a

$$\begin{aligned}\langle (x_1, y_1)^T \mid (x_2, y_2)^T \rangle &= x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + y_1y_2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donc $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
(4) Ils ne sont pas orthogonaux dans cet espace euclidien car

$$\langle \vec{i} \mid \vec{j} \rangle = 1/2 \neq 0.$$

Le vecteur $\vec{j} - \langle \vec{i} \mid \vec{j} \rangle \vec{i} = \vec{j} - \vec{i}/2 = (-1/2, 1)^T$ est orthogonal avec $\vec{i}$. Alors on peut prendre $\vec{k} = \frac{(-1/2,1)^T}{\sqrt{f_1(-1/2)}} = (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ tel que $\{\vec{i}, \vec{k}\}$ est une famille orthonormée.

Réponse d'exercice 1.10. (1) Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$p_n^2 \leq \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} v_k^2 = S_n(u) \cdot S_n(v),$$

donc la suite $\{p_n\}$ converge. Pour deux suites réeles u, v dans $\ell_2(\mathbb{R})$, la suite

$$S_n(u + v) = \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k)^2 = S_n(u) + S_n(v) + 2p_n$$

converge. On peut montrer facilement que pour toute $u \in \ell_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u \in \ell_2(\mathbb{R})$. Alors $\ell_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
(2) Tautologie

Réponse d'exercice 1.11. (1) Je ne veux pas faire ça dans LaTeX.
(2) Le produit scalaire $\vec{u}_a \cdot \vec{u}_b$ égale $\cos a \cos b + \sin a \sin b$. L'angle entre ces deux vecteurs unitaires est $|b-a|$, donc

$$\vec{u}_a \cdot \vec{u}_b = \cos|b-a| = \cos(n-a).$$

Alors on retrouve

$$\cos(b-a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

(3) Utilise la même méthode pour:

- $\vec{u}_{-a} \cdot \vec{u}_b$;
- $\vec{u}_{\frac{\pi}{2}-a} \cdot \vec{u}_b$;
- $\vec{u}_{\frac{\pi}{2}-b} \cdot \vec{u}_{-a}$.

Réponse d'exercice 1.12. (1) Similairement avec Exercice 1.6.
(2)

(i)

$$\begin{aligned}\langle c_k \mid c_\ell \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kt)\cos(\ell t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(k+\ell)t + \cos(k-\ell)t}{2}dt \\ &= \begin{cases} 1/2, \text{ si } k=\ell \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\langle s_k \mid s_\ell \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(kt)\sin(\ell t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(k-\ell)t - \cos(k+\ell)t}{2}dt \\ &= \begin{cases} 1/2, \text{ si } k=\ell \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

(iii)

$$\langle c_k \mid s_\ell \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kt)\sin(\ell t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(k+\ell)t + \sin(\ell-k)t}{2}dt = 0.$$

Donc $\{c_0, c_1, c_2, \dots, s_1, s_2, \dots\}$ est orthogonale.
(3) Comme $\{c_0, c_1, c_2, s_1, s_2\}$ est orthogonale, cette famille est libre, donc

$$\dim \mathrm{Vect}\{c_0, c_1, c_2, s_1, s_2\} = 5.$$

2 Feuille d'exercices 2

Réponse d'exercice 2.1. (a) On applique le procédé de Gram-Schmidt pour $\{a, b\}$.

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \|\mathrm{v}_1\|^2 = 5, \text{ donc } v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{\langle b \mid \mathrm{v}_1\rangle}{\langle \mathrm{v}_1 \mid \mathrm{v}_1\rangle}\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/5\\-1/5\end{pmatrix}$$

$$\|\mathrm{v}_2\|^2 = 1/5, \text{ donc } v_2 = \sqrt{5}\begin{pmatrix}2/5\\-1/5\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

(2) Pour $\{b, a\}$,

$$\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \|\mathrm{v}_1\|^2 = 2, \text{ donc } v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{\langle a \mid \mathrm{v}_1\rangle}{\langle \mathrm{v}_1 \mid \mathrm{v}_1\rangle}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$\|\mathrm{v}_2\|^2 = 1/2, \text{ donc } v_2 = \sqrt{2}\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

En changeant l'ordre des vecteurs, nous obtenons une base orthonormée différente du même espace euclidien.

(3) On continue le procédé:

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_3 &= \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \frac{\langle c \mid \mathrm{v}_1\rangle}{\langle \mathrm{v}_1 \mid \mathrm{v}_1\rangle}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{\langle c \mid \mathrm{v}_2\rangle}{\langle \mathrm{v}_2 \mid \mathrm{v}_2\rangle}\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{3/5}{1/5}\begin{pmatrix}2/5\\-1/5\end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

Donc le troisième vecteur devien nul.

Réponse d'exercice 2.2. Je ne donne que les résultats finaux:

(1)

$$\begin{pmatrix}6/7\\3/7\\2/7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2/7\\-6/7\\3/7\end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix}4/5\\0\\3/5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3/5\\0\\4/5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{pmatrix}1/10\\7/10\\1/10\\7/10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Réponse d'exercice 2.3. (1) Pour $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$,

$$\langle X^k \mid X^\ell \rangle = \int_{-1}^{1} t^{k+\ell} dt = \frac{1-(-1)^{k+\ell+1}}{k+\ell+1}.$$

(2) Pour l'espace $\mathrm{Vect}\{1, X, X^2\}$,

$$\mathrm{v}_1 = 1, \|\mathrm{v}_1\|^2 = 2 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{v}_2 = X - \frac{\langle X \mid 1 \rangle}{\langle 1 \mid 1 \rangle} 1 = X, \|\mathrm{v}_2\|^2 = 2/3 \Rightarrow v_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X$$

$$\mathrm{v}_3 = X^2 - \frac{\langle X^2 \mid 1 \rangle}{\langle 1 \mid 1 \rangle} 1 - \frac{\langle X^2 \mid X \rangle}{\langle X \mid X \rangle} X = X^2 - 1/3, \|\mathrm{v}_3\|^2 = 8/45 \Rightarrow v_3 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} X^2 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

Alors on a obtenu une base orthonormée

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} X^2 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \right\}.$$

(3) On peut voir $P(t)$ comme une fonction continue et appliquer le résultat de l'exercice 1.6.

Réponse d'exercice 2.4. (a) Comme $V = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}^\perp$, on a $V^\perp = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$ et $\{(1,1,1)\}$ est une base de $V^\perp$.
(b) Un vecteur $v \in V \Leftrightarrow v = (x, y, z)$ t.q. $x = -y - z$, donc

$$v = (-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

et $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ est une base de V. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, nous obtenons une base orthogonale $\{(-1,1,0),(-1/2,-1/2,1)\}$ de V.
(c) Pour $v=(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} p_V(v) &= \frac{\langle v \mid (-1,1,0)^T\rangle}{\|(-1,1,0)^T\|^2}(-1,1,0)^T + \frac{\langle v \mid (-1/2,-1/2,1)^T\rangle}{\|(-1/2,-1/2,1)^T\|^2}(-1/2,-1/2,1)^T \\ &= (\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z)^T \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc la matrice représentative de p_V est

$$P_V = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

et celle de $p_{V^\perp}$ est

$$P_{V^\perp} = I - P_V = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(d) Par le résultat du 4 dans l'exercice 2.2, $\{(1,1,-2),(1,-1,0)\}$ est une base orthogonale de V.

Réponse d'exercice 2.5. (1) Un vecteur $(x,y,z,t)^T$ appartient à $V^\perp$ si et seulement si

$$x-y=0, 3x+y+z=0.$$

(2) On peut écrire $(x,y,z,t)^T \in V^\perp$ sous la forme

$$(x,x,-4x,t)^T = x(1,1,-4,0)^T + t(0,0,0,1)^T$$

donc $\{(1,1,-4,0),(0,0,0,1)\}$ est une base de $V^\perp$. Par le procédé de Gram-Schmidt, on a une base orthonormée

$$\{(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0)^T, (0,0,0,1)^T\}$$

de $V^\perp$.
(3) Un vecteur $(x,y,z,t)^T \in V$ si et seulement si $(x,y,z,t)^T \perp V^\perp$, qui est équivalent à

$$x+y-4z=0, t=0.$$

(4) Par la question (2), $\{a,b,c,(1,1,-4,0)^T\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Comme

$$(1,1,-4,0)^T = \frac{-a+b+9c-9d}{2},$$

$\mathcal{B}=\{a,b,c,d\}$ est aussi une base de $\mathbb{R}^4$.
(5) Facile
(6) Refaite le procédé de Gram-Schmidt si tu veux.

Réponse d'exercice 2.6. (1) $(1,1,-2)^T$.
(2) La projection sur $P^\perp$ est donnée par

$$p_{P^\perp}(v) = \frac{\langle v \mid (1,1,-2)^T\rangle}{\|(1,1,-2)^T\|^2}(1,1,-2)^T = \frac{x+y-2z}{6}(1,1,-2)^T = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} v,$$

alors

$$p_P(v) = v - p_{P^\perp}(v) = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} v.$$

(3) La distance

$$d((0,0,1)^T, P) = \|(0,0,1)^T - p_P((0,0,1)^T)\| = \|(-1/3,-1/3,2/3)^T\| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(4) On les a déja écrites.

Réponse d'exercice 2.7. Soit $V \subset \mathbb{R}[X]$ le sous-espace engendré par $\{1, X, X^2\}$, donc

$$\inf_{a,b,c} \int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt = d(X^3, V)^2 = \|X^3 - p_V(X^3)\|^2.$$

Par l'exercice 2.3, on a une base orthonormée $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}X^2 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right\}$ de V, alors

$$\begin{aligned} p_V(X^3) &= \langle X^3 \mid \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} + \langle X^3 \mid \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X\rangle \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X + \langle X^3 \mid \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2-1)\rangle \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2-1) \\ &= \frac{3}{5}X. \end{aligned}$$

On peut calculer

$$d(X^3, V)^2 = \|X^3 - 3X/5\|^2 = \langle X^3 \mid X^3\rangle + \frac{9}{25}\langle X \mid X\rangle - \frac{6}{5}\langle X^3 \mid X\rangle = 8/175.$$

Réponse d'exercice 2.8. (1) Pour un vecteur $v \in E$,

$$v \in F^\perp \cap G^\perp \Leftrightarrow v \perp F, v \perp G \Leftrightarrow v \perp (F+G) \Leftrightarrow v \in (F+G)^\perp,$$

donc $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$.
(2)

$$F^\perp + G^\perp = \left(\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp\right)^\perp = \left((F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp\right)^\perp = (F \cap G)^\perp.$$

(3) Les deux sous-espaces $F^\perp$ et $G^\perp$ sont en somme direct car

$$F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp = E^\perp = 0.$$

Comme $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp = 0^\perp = E$, on a $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

Réponse d'exercice 2.9. (1)(2) Tautologies
(3)

$$V_1 = 1, f(V_1, V_1) = 1 \Rightarrow U_1 = 1$$

$$V_2 = X - f(X,1) \cdot 1 = X - 1, f(V_2, V_2) = 1 \Rightarrow U_2 = X - 1$$

$$V_3 = X^2 - f(X^2,1)\cdot 1 - f(X^2, X-1)(X-1) = X^2 - 2X + 1, f(V_3, V_3) = 4 \Rightarrow U_3 = \frac{1}{2}(X-1)^2$$

Alors $U_1 = 1, U_2 = X - 1, U_3 = \frac{1}{2}(X-1)^2$.
(4) On peut vérifier facilement que

$$f(U_1, P) = P(1), f(U_2, P) = P'(1), f(U_3, P) = P''(1),$$

dont

$$P = f(U_1, P)U_1 + f(U_2, P)U_2 + f(U_3, P)U_3 = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2.$$

(5) Pour $\mathbb{R}_n[X]$ et un nombre a quelconque, en appliquant le procédé de Gram-Schmidt pour $\{1, X, \ldots, X^n\}$ et le produit scalaire

$$f(P,Q) = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(a)Q^{(i)}(a),$$

on obtient une base orthonormée $\{U_0, U_1, \ldots, U_n\}$:

$$U_k = \frac{1}{k!}(X-a)^k, k = 0, 1, \ldots, n.$$

Alors pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il a un développement de la forme suivante:

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

3 Feuille d'exercices 3

Réponse d'exercice 3.1. (1) La matrice $M \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si les vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Alors, on a

$$\begin{cases} 3 + a^2 + 3 = 6 \\ 2 + 2 + b^2 = 6 \\ c^2 + d^2 + e^2 = 6 \\ \sqrt{6} + \sqrt{2}a + \sqrt{3}b = 0 \\ \sqrt{2}c + \sqrt{2}d + be = 0 \\ \sqrt{3}c + ad + \sqrt{3}e = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système d'équations, on obtient

$$a = 0, b = -\sqrt{2},$$

et

$$\begin{cases} c^2 + d^2 + e^2 = 6 \\ c + d - e = 0 \\ c + e = 0 \end{cases}$$

Alors

$$(a, b, c, d, e) = (0, -\sqrt{2}, 1, -2, -1) \text{ ou } (0, -\sqrt{2}, -1, 2, 1).$$

(2) Le déterminant de M, en prenant $a = 0, b = -\sqrt{2}$, égale

$$\det M = (-c + 2d + e)/6.$$

Donc $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $(a, b, c, d, e) = (0, -\sqrt{2}, -1, 2, 1)$.

Réponse d'exercice 3.2. (1) On pose que

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

avec $a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0$ et $M^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$. La relation $MM^{-1} = 0$ montre que

$$\begin{aligned} 0 &= (MM^{-1})_{31} = a_{33}b_{31}, \\ 0 &= (MM^{-1})_{32} = a_{33}b_{32}, \\ 0 &= (MM^{-1})_{21} = a_{22}b_{21} + a_{33}b_{31}. \end{aligned}$$

Alors on a $b_{21} = b_{31} = b_{32} = 0$, donc M^{-1} est inversible et triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux de M^{-1} sont $a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, a_{33}^{-1}$.
(2) Une matrice inversible et triangulaire supérieure M est orthogonale si et seulement si $M^{-1} = M^T$. Comme $M^T = M^{-1}$ est triangulaire supérieure par la question précédente, donc M est triangulaire inférieure. Une matrice qui est triangulaire supérieure et triangulaire inférieure en même temps est diagonale, donc les matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ sont des matrices diagonales à coefficients diagonaux non nuls.
(3) Soit M une matrice orthogonale dont les coefficients sont tous positifs. Supposons que certaines colonnes de M contiennent plus d'un élément strictement positif. Alors, selon le principe des tiroirs, il doit y avoir un composant strictement positif dans au moins deux colonnes, ce qui contredit l'orthogonalité de M.

Alors les matrices orthogonales à coefficients positifs sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réponse d'exercice 3.3. (1) Pour tout vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle PX \mid PY \rangle = (PX)^T PY = X^T P^T PY = X^T Y = \langle X \mid Y \rangle.$$

(2) Soit $Z \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre correspondant à λ, et on écrit $Z = X + iY$, où $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Comme $\lambda X + i\lambda Y = \lambda Z = PZ = PX + iPY$, on a $PX = \lambda X$ et $PY = \lambda Y$. Alors on peut supposer que λ admet un vecteur propre réel $X \in \mathbb{R}^n$. Par la question précédente,

$$\lambda^2 \|X\|^2 = \langle \lambda X \mid \lambda X \rangle = \langle X \mid X \rangle = \|X\|^2.$$

Alors $\lambda^2 = 1$ et $\lambda = 1$ ou -1.
(3) Maintenant on a $PZ = \lambda Z$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Z = (z_1, \dots, z_n)^T \in \mathbb{C}^n$.
 (a) $\overline{Z}^T Z = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$.
 (b)

$$(P\overline{Z})^T (PZ) = \overline{Z}^T P^T PZ = \overline{Z}^T Z.$$

 (c) Comme $PZ = \lambda Z$,

$$|\lambda|^2 \overline{Z}^T Z = \overline{\lambda Z}^T \lambda Z = \overline{PZ}^T PZ = \overline{Z}^T Z.$$

Donc $|\lambda| = 1$ car $\overline{Z}^T Z$ est non nul.
(4) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symmétrique admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ pour laquelle on a un vecteur propre $Z \in \mathbb{C}^n$. Le produit matriciel $\overline{Z}^T AZ$ égale

$$\overline{Z}^T (\lambda Z) = \lambda \overline{Z}^T Z.$$

Comme A est symmétrique, $\overline{Z}^T AZ = \overline{Z}^T A^T Z = \overline{(AZ)}^T Z = \overline{\lambda}(\overline{Z}^T Z)$, donc $\lambda = \overline{\lambda}$ est réelle car $\overline{Z}^T Z$ est non nul.

Réponse d'exercice 3.4. (1)(2) Tautologies.
(3) Le sous-espace $V := \ker(\varphi - \mathrm{Id})$ est le sous-espace de polynômes pairs, qui est engendré par $\{1, X^2\}$. L'orthogonal de V est engendré par X, alors $V^\perp$ est le sous-espace de polynômes impairs.

On peut décomposer P comme

$$P = \frac{P + \varphi(P)}{2} + \frac{P - \varphi(P)}{2},$$

òu $(P + \varphi(P))/2$ est un polynôme pair et $(P - \varphi(P))/2$ est impair, donc $P \mapsto (P - \varphi(P))/2$ est la projection orthogonale sur $V^\perp = \mathrm{Vect}\{X\}$. Alors la symmétrie orthogonale par rapport à V est donnée par

$$P \mapsto P - 2 \cdot \frac{P - \varphi(P)}{2} = \varphi(P),$$

donc φ est un symmétrie orthogonale.
(4) La matrice de φ est $\mathrm{diag}(1, -1, 1)$, donc ses valeurs propres sont $1, -1$.

Réponse d'exercice 3.5. On note $\ker(u - \mathrm{Id})$ par F, et note $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ par G. Pour tout $x \in F$ et tout $y = u(z) - z \in G$, on a

$$\langle x \mid y \rangle = \langle x \mid u(z) \rangle - \langle x \mid z \rangle = \langle u(x) \mid u(z) \rangle - \langle x \mid z \rangle = 0,$$

donc $F \perp G$ et par le théorème du rang $E = F \oplus G$. Alors $F^\perp = G$ et $G^\perp = F$.

Réponse d'exercice 3.6. Facile. On peut écrire E comme $E_1 \oplus E_2$ dont $u|_{E_1} = \mathrm{Id}_{E_1}$ et $u|_{E_2} = -\mathrm{Id}_{E_2}$. Alors E est la symétrie orthogonale par rapport à E_1.

Réponse d'exercice 3.7. (1) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(2) $Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.
(3) Tautologie.

Réponse d'exercice 3.8. $s \circ s = \mathrm{Id}$. Soit S la matrice de s dans une base orthonormée. Car $S^2 = \mathrm{I} = SS^T$, on a $S = S^T$. Alors S est orthogonale et symétrique.

La réciproque: Soit s une isométrie vectorielle de E dont le matrice S de s dans une base orthonormée est orthogonale et symétrique. Alors $S^2 = SS^T = \mathrm{I}$ et $s^2 = \mathrm{Id}$. Si λ est un valeur propre de s, donc il existe un vecteur non-nul $v \in E$ tel que $sv = \lambda v$. Car $v = s^2 v = s(\lambda v) = \lambda^2 v$, on a $\lambda = \pm 1$. Par l'exercice 3.6, s est une symétrie orthogonale.

Réponse d'exercice 3.9. (1) Par le procédé de Gram-Schmidt, on a les identités suivantes:

$$\begin{gathered} v_1 = x_1,\ u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \\ v_2 = x_2 - \langle x_2 \mid u_1 \rangle u_1 = x_2 - \frac{\langle x_2 \mid x_1 \rangle}{\langle x_1 \mid x_1 \rangle} x_1,\ u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}, \\ \cdots\cdots \end{gathered}$$

alors pour $k = 1, 2, \ldots, n$, le vecteur $u_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$, où $v_k \in x_k + \mathrm{Vect}\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$. Car $\mathrm{Vect}\{x_1, \ldots, x_{k-1}\} = \mathrm{Vect}\{u_1, \ldots, u_k\}$, pour chaque k, $x_k \in \|v_k\| u_k + \mathrm{Vect}\{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$, donc $R = \mathrm{Mat}_{\mathcal{U}} \mathcal{X}$ est triangulaire supérieure à diagonale positive.
(2) Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{U} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{U}} \mathcal{X} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{U} \cdot R,$$

la matrice A peut s'écrire QR, où $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}} \mathcal{U}$ est orthogonale et R est triangulaire supérieure à diagonale positive.
(3) Il faut montrer que si une matrice orthogonale X est triangulaire supérieure à diagonale positive, alors $X = \mathrm{I}_n$. C'est montré par la même méthode de l'exercice 3.2(2).

4 Feuille d'exercices 4

Réponse d'exercice 4.1. (1) Dans le base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, on a

$$s_\alpha(\vec{i}) = 2p_{D_\alpha}(\vec{i}) - \vec{i} = 2\langle \vec{u}_\alpha \mid \vec{i}\rangle \vec{u}_\alpha - \vec{i} = (2\cos^2\alpha - 1)\vec{i} + 2\sin\alpha\cos\alpha\vec{j} = \cos 2\alpha\vec{i} + \sin 2\alpha\vec{j},$$
$$s_\alpha(\vec{j}) = 2\langle \vec{u}_\alpha \mid \vec{j}\rangle \vec{u}_\alpha - \vec{j} = 2\sin\alpha\cos\alpha\vec{i} + (2\sin^2\alpha - 1)\vec{j} = \sin 2\alpha\vec{i} - \cos 2\alpha\vec{j},$$

donc la matrice représentative S_α est

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

(2) Pour deux réels α et β, les produits

$$S_\alpha S_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\alpha\sin 2\beta & \cos 2\alpha\sin 2\beta - \sin 2\alpha\cos 2\beta \\ \sin 2\alpha\cos 2\beta - \cos 2\alpha\sin 2\beta & \sin 2\alpha\sin 2\beta + \cos 2\alpha\cos 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha-\beta) & -\sin 2(\alpha-\beta) \\ \sin 2(\alpha-\beta) & \cos 2(\alpha-\beta) \end{pmatrix},$$
$$S_\beta S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2(\beta-\alpha) & -\sin 2(\beta-\alpha) \\ \sin 2(\beta-\alpha) & \cos 2(\beta-\alpha) \end{pmatrix}.$$

(3) On note la matrice de la rotation d'angle α par M_α. Par la question (2), on a $S_\alpha S_\beta = M_{2(\alpha-\beta)}$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors pour la rotation M_α,

$$M_\alpha = M_{2(\alpha/2-0)} = S_{\alpha/2}S_0$$

est la composée de deux symétries orthogonales.
(4) Le groupe $\mathrm{O}(P)$ n'est pas commutatif parce que $S_{\pi/4}S_0 = M_{\pi/2} \neq M_{-\pi/2} = S_0 S_{\pi/4}$.

Réponse d'exercice 4.2. (i) C'est une rotation d'angle $\pi/4$.
(ii) C'est une symétrie par rapport à

$$\ker(u - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\{(\sqrt{3}, 1)^T\}.$$

(iii) C'est une symétrie par rapport à

$$\ker(u - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -8/5 & 4/5 \\ 4/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\{(1, 2)^T\}.$$

(iv) C'est une symétrie par rapport à

$$\ker(u - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -8/13 & 12/13 \\ 12/13 & -18/13 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\{(3, 2)^T\}.$$

Réponse d'exercice 4.3. Soit $\{\vec{v}\}$ une base de l'orthogonale de la driote $\mathrm{Vect}\{\vec{u}\}$ dans E. Comme $f \in \mathrm{O}(E)$ et $f(\vec{u}) = \vec{u}$, l'image $f(\vec{v})$ égale $\pm\vec{v}$. Si $f(\vec{v}) = \vec{v}$, $f = \mathrm{Id}$; si $f(\vec{v}) = -\vec{v}$, $f = s_{\mathrm{Vect}\{\vec{u}\}}$ est la symétrie par rapport à la droite $\mathrm{Vect}\{\vec{u}\}$.

Réponse d'exercice 4.4. (1) Car $\det A = 1$, il existe une base orthonormée $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ dont la matrice de l'endomorphisme u dans $\mathcal{E}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [-\pi, \pi].$$

La droite $D = \ker(A - \mathrm{I}_3)$ est engendrée par $(x, y, z)^T$ t.q.

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & -1 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = z, y = 0.$$

Alors on choisit $e_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.

Comme $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos\theta$, on a $\cos\theta = 0$, donc $\theta = -\pi/2$ ou $\pi/2$. On prend $X = (0, 1, 0)$ un vecteur quit n'est pas colinéaire à e_1. Car $\det(e_1, X, u(X)) = \det(e_1, X, AX) > 0$, $\sin\theta$ est positif et $\theta = \pi/2$, donc u est une rototaion d'axe dirigé par e_1 et d'angle $\pi/2$.

Pour la base $\mathcal{B}$, on choisit $e_2 = (0, 1, 0)^T$, donc $e_3 = e_1 \wedge e_2 = (-1/\sqrt{2}, 0, \sqrt{1})$. En conclusion, dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$, la matrice de la rotation u est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque: La base $\{e_1, e_2, e_3\}$ n'est pas unique, et si on change l'orientation, l'angle de la rotation u devient $-\theta = -\pi/2$.
(2) On peut choisir la base

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

et la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & -\sqrt{11}/6 \\ 0 & \sqrt{11}/6 & 5/6 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme u est une antiroration d'axe dirigé par e_1 et d'angle $\arcsin \frac{\sqrt{11}}{6}$.
(3) On peut choisir

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\},$$

et la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme u est une roration d'axe dirigé par e_1 et d'angle π.

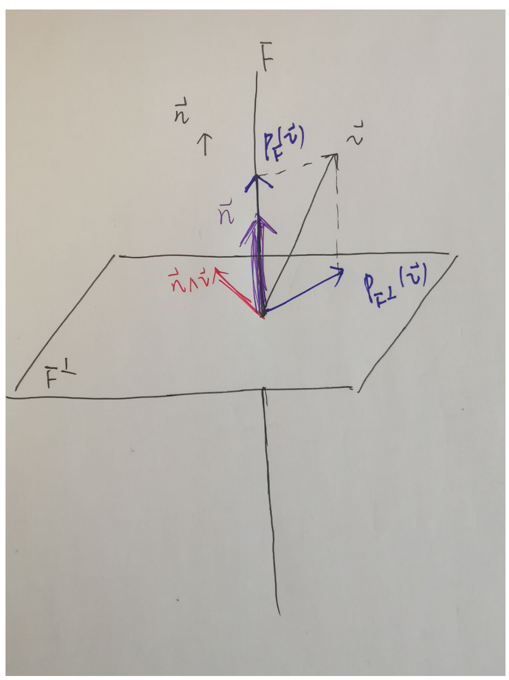
Réponse d'exercice 4.5. Les isométries f de E t.q. $f(\vec{u}) = \vec{u}$ sont des isométries du plan vectoriel $\mathrm{Vect}(\vec{u})^\perp$.

Réponse d'exercice 4.6. Quand $\vec{v} \in F$, l'identité est vrai. Maintenant on suppose que $\vec{v} \notin F$.

Le produit vectoriel $\vec{n} \wedge \vec{v}$ est orthogonal avec $\mathrm{Vect}\{\vec{n}, \vec{v}\}$, donc $\langle \vec{n} \wedge \vec{v} \mid p_{F^\perp}(\vec{v})\rangle = \langle \vec{n} \wedge \vec{v} \mid \vec{v} - \langle \vec{v} \mid \vec{n}\rangle \vec{n}\rangle = 0$. Par la formule dans Exercice 4.9, on peut obtenir

$$p_{F^\perp}(\vec{v}) \wedge (\vec{n} \wedge \vec{v}) = \left(\|\vec{v}\|^2 - \|p_F(\vec{v})\|^2\right) \vec{n},$$

alors $\{p_{F^\perp}(\vec{v}), \vec{n} \wedge \vec{v}\}$ est une base orthogonale directe du plan $F^\perp$.



Rappel: Dans le plan vectoriel P muni d'une base orthonormée directe $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, l'image de $\vec{i}$ sous la rotation r_θ est $(\cos\theta)\vec{i} + (\sin\theta)\vec{j}$.

Alors on a

$$\begin{aligned} r_{\theta,\vec{n}}(\vec{v}) &= p_F(\vec{v}) + r_\theta(p_{F^\perp}(\vec{v})) \\ &= \langle \vec{v} \mid \vec{n}\rangle \vec{n} + \|p_{F^\perp}(\vec{v})\| \left(\cos\theta \frac{p_{F^\perp}(\vec{v})}{\|p_{F^\perp}(\vec{v})\|} + \sin\theta \frac{\vec{n} \wedge \vec{v}}{\|\vec{n} \wedge \vec{v}\|} \right) \\ &= \langle \vec{v} \mid \vec{n}\rangle \vec{n} + (\cos\theta)(\vec{v} - \langle \vec{v} \mid \vec{n}\rangle \vec{n}) + (\sin\theta)\vec{n} \wedge \vec{v}. \end{aligned}$$

Dans la dernière étape, on a untilisé:

$$\|\vec{n} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{v}\| |\sin \widehat{(\vec{n}, \vec{v})}| = \|p_{F^\perp}(\vec{v})\|.$$

La symétrie orthogonale $s_{F^\perp}$ par rapport à $F^\perp$ est donnée par $s_{F^\perp}(\vec{x}) = \vec{x} - 2\langle \vec{x} \mid \vec{n} \rangle \vec{n}$. La composée de $r_{\theta,\vec{n}}$ avec $s_{F^\perp}$ est

$$\begin{aligned} r_{\theta,\vec{n}}(s_{F^\perp}(\vec{v})) &= r_{\theta,\vec{n}}(\vec{v} - 2\langle \vec{v} \mid \vec{n} \rangle \vec{n}) \\ &= r_{\theta,\vec{n}}(\vec{v}) - 2\langle \vec{v} \mid \vec{n} \rangle r_{\theta,\vec{n}}(\vec{n}) \\ &= -\langle \vec{v} \mid \vec{n} \rangle \vec{n} + (\cos\theta)(\vec{v} - \langle \vec{v} \mid \vec{n} \rangle \vec{n}) + (\sin\theta)\vec{n} \wedge \vec{v}. \end{aligned}$$

On peut trouver que $r_{\theta,\vec{n}} \circ s_{F^\perp} = s_{F^\perp} \circ r_{\theta,\vec{n}}$.

Une autre méthode: On peut choisir une base orthonormée directe $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de E telle que $\vec{e}_1 = \vec{n}$ et la matrice de $r_{\theta,\vec{n}}$ dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Maintenant dans cette base $\vec{n} = (1, 0, 0)^T$ et soit $\vec{v} = (x, y, z)^T$, puis l'identité pourrait être montrée par un calcul direct.

Réponse d'exercice 4.7. Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ est orthogonal avec $\mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{u}'\}$, donc $\vec{u} \wedge \vec{u}' \in (\mathrm{Vect}\{\vec{u}\} + \mathrm{Vect}\{\vec{u}'\})^\perp = \mathrm{Vect}\{\vec{u}\}^\perp \cap \mathrm{Vect}\{\vec{u}'\}^\perp = P \cap P'$. Comme $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires, la dimension de $\mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{u}'\}$ égale 2, alors $\dim P \cap P' = 1$ et $P \cap P' = \mathrm{Vect}\{\vec{u} \wedge \vec{u}'\}$.

Réponse d'exercice 4.8. Par la formule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| |\sin \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}|$.

Réponse d'exercice 4.9. Si $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{w}$, alors

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0 = \langle \vec{u} \mid \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle \vec{w}.$$

Sinon, $\vec{v} \wedge \vec{w} \neq 0$ et on a une base $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w}\}$ de E. Soit

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = a\vec{v} + b\vec{w} + c\vec{v} \wedge \vec{w},$$

et il faut trouver a, b, c. Comme $\langle \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \mid \vec{u} \rangle = 0$ et $\langle \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \mid \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle = 0$, on a

$$\begin{gathered} 0 = \langle a\vec{v} + b\vec{w} + c\vec{v} \wedge \vec{w} \mid \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle = c\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|^2 \Rightarrow c = 0, \\ 0 = \langle a\vec{v} + b\vec{w} + c\vec{v} \wedge \vec{w} \mid \vec{u} \rangle = a\langle \vec{v} \mid \vec{u} \rangle + b\langle \vec{w} \mid \vec{u} \rangle, \end{gathered}$$

donc $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \lambda(\langle \vec{u} \mid \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle \vec{w})$ pour un réel λ.

Soit $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}\}$ une base orthonormée directe canonique de E. On prends $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ être $(\vec{i}, \vec{i}, \vec{j})$, puis

$$\begin{gathered} \vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}, \\ \langle \vec{i} \mid \vec{j} \rangle \vec{i} - \langle \vec{i} \mid \vec{i} \rangle \vec{j} = -\vec{j}, \end{gathered}$$

alors $\lambda = 1$ et on a obtenu l'identité désirée.

Le produit vectoriel n'est pas associatif parce que

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\langle \vec{v} \mid \vec{w} \rangle \vec{u} + \langle \vec{u} \mid \vec{w} \rangle \vec{v} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

5 Feuille d'exercice 5

Réponse d'exercice 5.1. Dans ce cas, on a

$$O\vec{f(M)} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = O\vec{f(O)} + \vec{f}(O\vec{M}),$$

donc $f(O) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'application vectorielle associée $\vec{f}$ est une rotation d'angle $\pi/3$. Le point fixe $\Omega = \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$ satisfait

$$\left(\mathrm{I}_2 - \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors $\Omega = (1, \sqrt{3})^T$. En conclusion, f est une rotation de centre $\Omega = (1, \sqrt{3})^T$ et d'angle $\pi/3$.

Réponse d'exercice 5.2. Pour tous $M = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, on calcule la distance

$$\begin{aligned} d(f(M), f(N)) &= \sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - 2y_1 - x_2 + 2y_2)^2 + (2x_1 + y_1 - 2x_2 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{5(x_1 - x_2)^2 + 5(y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{5}d(M, N), \end{aligned}$$

alors f est une similitude de rapport $\sqrt{5}$.

On peut réécrire $f(M)$ comme:

$$f(M) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{5} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{smallmatrix}\right)$ a déterminant 1, la similitude f est directe.

Le centre $\Omega = (x_\Omega, y_\Omega)^T$ de f satisfait l'équation:

$$\begin{pmatrix} 1 + x_\Omega - 2y_\Omega \\ 1 + 2x_\Omega + y_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix},$$

donc $\Omega = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

En conclusion, f est la composée de la rotation d'angle $\theta = \arccos 1/\sqrt{5}$ et de centre $\Omega = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ avec la homothétie $h_{\Omega,\sqrt{5}}$ de centre Ω et de rapport $\sqrt{5}$.

Réponse d'exercice 5.3. (1) L'application vectorielle associée $\vec{f}$ est la composée $\vec{R_2} \circ \vec{t}_{I\vec{J}} \circ \vec{R_1}$, donc

$$\vec{f} = r_{\pi/2} \circ \mathrm{id} \circ r_{\pi/2} = r_\pi = -\mathrm{id}.$$

(2) $f(O) = (1,1)^T, f(I) = J, f(J) = I$.
(3) L'application affine f est une rotation d'angle π et de centre $(1/2, 1/2)^T$.

Réponse d'exercice 5.4. (1) En utilisant l'écriture complexe,

$$\begin{aligned}
z' = f(z) =& x' + iy' \\
=& 2 + (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})x + (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})y \\
=& 2 + (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{z+\overline{z}}{2}) + (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})(\frac{z-\overline{z}}{2i}) \\
=& 2 + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z \\
=& 2 + e^{i\pi/3}z.
\end{aligned}$$

Alors f est une rotation d'angle $\pi/3$ et de centre d'affixe $\frac{2}{1-e^{i\pi/3}} = 1 + i\sqrt{3}$.
(2) En utilisant l'écriture complexe,

$$\begin{aligned}
z' = f(z) &= x' + iy' \\
&= 1 + i + (1+2i)x + (-2+i)y \\
&= 1 + i + (1+2i)(\frac{z+\overline{z}}{2}) + (-2+i)(\frac{z-\overline{z}}{2i}) \\
&= 1 + i + (1+2i)z.
\end{aligned}$$

Alors f est une similitude directe de rapport $|1+2i| = \sqrt{5}$. Son point fixe Ω correspond à $\frac{1+i}{1-(1+2i)} = \frac{-1+i}{2}$. L'application f s'écrit alors

$$f = h_{\Omega,|1+2i|} \circ R_{\Omega,\arg(1+2i)} = h_{\Omega,\sqrt{5}} \circ R_{\Omega,\arccos(1/\sqrt{5})}.$$

(3) En utilisant l'écriture complexe,

$$\begin{aligned}
z' = f(z) &= R_2 \circ t_{\vec{IJ}} \circ R_1(z) \\
&= R_2 \circ t_{\vec{IJ}} \left(e^{i\pi/2}(z-1) + 1\right) \\
&= R_2 \left(-1 + i + i(z-1) + 1\right) \\
&= R_2 \left(iz\right) \\
&= e^{i\pi/2}(iz - i) + i \\
&= 1 + i - z.
\end{aligned}$$

Alors f est une rotation d'angle π et de centre $\frac{1+i}{1-(-1)} = \frac{1+i}{2}$.

Réponse d'exercice 5.5. (a)

$$f(z) = (1+i) + 2e^{i\pi/2}\left(z - (1+i)\right) = 3 - i + 2iz.$$

(b) Le centre de g est $\frac{2i-3}{1-(1-i)} = 2+3i$, le rapport de g est $|1-i| = \sqrt{2}$, et l'angle de g est $\arg(1-i) = -\pi/4$. Alors g est la similitude directe de centre d'affixe $2+3i$ de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\pi/4$.
(c)
$$g \circ f(1) = g(3-i+2i) = g(i+3) = (1-i)(i+3) + 2i - 3 = 1,$$
donc $g \circ f(I) = I$. Le produit de $1-i$ avec $2i$ égale $2+2i$, alors $g \circ f$ est la similitude directe de centre I de rapport $2\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$.

Réponse d'exercice 5.6. (a) Soit θ l'angle orienté $(\vec{AB}, \vec{AC})$, donc il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$z_C - z_A = \lambda e^{i\theta}(z_B - z_A),$$
alors $\theta = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.
(b) Par la question (a),
$$\begin{aligned}
(\vec{A'B'}, \vec{A'C'}) &= \arg\left(\frac{f(z_C) - f(z_A)}{f(z_B) - f(z_A)}\right) \\
&= \arg\left(\frac{(az_C + b) - (az_A + b)}{(az_B + b) - (az_A + b)}\right) \\
&= \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \\
&= \arg(\vec{AB}, \vec{AC}).
\end{aligned}$$

(c) Une similitude indirecte est la composée d'une similitude directe avec la similitude representée par $z \mapsto \overline{z}$. Comme on a
$$\arg\left(\frac{\overline{z_C} - \overline{z_A}}{\overline{z_B} - \overline{z_A}}\right) = \arg\overline{\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)} = -\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right),$$
les similitudes indirectes transforment tout angle en son opposé.

Réponse d'exercice 5.7. (1) $\vec{v}_D = (1,1)^T$ est un vecteur directeur de D. Pour un vectur $\vec{v} = (x,y)^T$, l'image
$$\vec{s}_D(\vec{v}) = 2p_{\vec{v}_D}(\vec{v}) - \vec{v} = 2\frac{x+y}{2}\vec{v}_D - \vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix},$$
donc la matrice de $\vec{s}_D$ dans la base $(\vec{OI}, \vec{OJ})$ est $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
(2) La nouvelle origine $O' = (1,-1)^T$. Pour tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'image $s_D(M)$ a coordonnées
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+y \\ -1+x \end{pmatrix}.$$

(3) Dans le repère (O, I, J),

$$h(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = t_{\vec{u}}(\begin{pmatrix} 1+y \\ -1+x \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2+y \\ x \end{pmatrix},$$

donc h n'admet pas des points invariants.

Réponse d'exercice 5.8. (1) Dans ce cas,

$$z' = f(z) = 2 - i + (\frac{-3+4i}{5})\overline{z}.$$

Comme

$$\frac{-3+4i}{5} \cdot \overline{2-i} + (2-i) = 0,$$

f est une symmétrie orthogonale par rapport à la droite D passant par $\frac{2-i}{2}$ et faisant un angle $\frac{\arccos(-3/5)}{2}$ avec l'axe des abscisses.
(2) Dans ce cas,

$$z' = f(z) = -1 + 3i + (\frac{-3+4i}{5})\overline{z}.$$

Comme

$$\frac{-3+4i}{5} \cdot \overline{-1+3i} + (-1+3i) = 2+4i \neq 0,$$

f est une symmétrie glissée, composée de la translation par le vecteur $1+2i$ et de la symmétrie de droite D passant par $\frac{-1+3i}{2}$ et faisant un angle $\frac{\arccos(-3/5)}{2}$ avec l'axe des abscisses.

Réponse d'exercice 5.9. (1) Soit $f(z) = cz + d$ une similitude directe telle que $f(a) = a'$ et $f(b) = b'$. Alors,

$$c = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{a' - b'}{a - b},\ d = a' - ca = \frac{ab' - ba'}{a - b},$$

donc la similitude directe est unique et donnée par

$$f(z) = \frac{a' - b'}{a - b} z + \frac{ab' - ba'}{a - b}.$$

(2)

(a) Quand $\vec{A'B'} = \vec{AB} \Leftrightarrow a' - b' = a - b$, l'application $f(z) = z + (a' - a)$, alors f est une translation.

(b) Quand $A'B' = AB$, le module de $\frac{a'-b'}{a-b}$ égale 1, donc f est une isométrie.

(c) Quand $\vec{A'B'} = -2\vec{AB}$, on a $a' - b' = -2(a - b)$. Alors $f(z) = -2z + a' + 2a$, et f est une similitude directe de rapport 2. Son point fixes Ω a point affixe $\omega = \frac{a'+2a}{1+2} = \frac{a'+2a}{3}$. En conlusion, $f = h_{\Omega,2} \circ R_{\Omega,\pi}$.