Université Paris Saclay **MDD 102**
L1S1 **Algèbre**

Contrôle des connaissances 2. Corrigé

Relations, arithmétique, nombres complexes

Exercice 2.1. Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on définit la relation R par :

$$(x, y)R(x', y') \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.
2. Représenter graphiquement dans le plan $\mathbb{R}^2$ la classe d'équivalence de l'élément $(0, 1)$.
Réponse 1.
- R est réflexive : $x^2 + y^2 = x^2 + y^2$;
- R est symétrique : $(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \Leftrightarrow (x', y')R(x, y)$;
- R est transitive : $(x, y)R(x', y'), (x', y')R(x'', y''$ implique que $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2$, donc $(x, y)R(x'', y'')$.

Alors R est une relation d'équivalence.
2. La classe d'équivalence est un cercle de rayon 1.

Exercice 2.2. **1.** Montrer que 23 et 15 sont premiers entre eux, et trouver u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $23u + 15v = 1$.
2. Soient x et y dans $\mathbb{Z}$, on pose $n = 23uy + 15vx$ où u et v sont les entiers trouvés à la question précédente. Montrer que $n \equiv x$ [23] et $n \equiv y$ [15].
3. Application : trouver un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \equiv 5$ [23] et $n \equiv 3$ [15].
Réponse 1. On utilise l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 23 &= 1 \times 15 + 8 \\ 15 &= 1 \times 8 + 7 \\ 8 &= 1 \times 7 + 1 \\ 7 &= 7 \times 1 + 0. \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{pgcd}(23, 15) = 1$ et ils sont premiers entre eux. Par l'identités dans l'algorithme,

$$1 = 8 - 7 = 8 - (15 - 8) = -15 + 2 \times (23 - 15) = 2 \times 23 - 3 \times 15,$$

alors on peut prendre $u = 2, v = -3$.
2. Pour $x, y \in \mathbb{Z}$, $n = 46y - 45x$. Dans $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$, $n \equiv -45x \equiv x - 23 \times 2x \equiv x$ [23]. Dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, $n \equiv 46y \equiv y + 15 \times 3y \equiv y$ [15].
3. Applique le résultat de la question précédente et prends $x = 5, y = 3$. L'entier $n = 46y - 45x = -87$ satisfait $n \equiv 5$ [23] et $n \equiv 3$ [15].

Exercice 2.3. On se place dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
1. Calculer les premières puissances de $\overline{2}$ jusqu'à trouver un entier $n_0 \geq 1$ tel que $\overline{2}^{n_0} = \overline{1}$.

2. Avec l'entier n_0 de la question précédente, montrer que pour tous q et r dans $\mathbb{N}$, $\overline{2}^{qn_0+r} = \overline{2}^r$.

3. Quel est le reste de la division euclidienne de 10^{11} par 3.

4. Montrer que 7 divise $9^{(10^{11})} + 5$.

Réponse 1. On a $\overline{2}^1 = \overline{2}, \overline{2}^2 = \overline{4}, \overline{2}^3 = \overline{1}$, donc $n_0 = 3$.
2. Pour tous $q, r \in \mathbb{N}$, $\overline{2}^{3q+r} = (\overline{2}^3)^q \cdot \overline{2}^r = \overline{2}^r$.
3. Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $10 \equiv 1$ [3]. Alors $10^{11} \equiv 1^{11} \equiv 1$ [3], donc le reste de la division euclidienne de 10^{11} par 3 est 1.
4. Par la question **3**, il existe un entier q tel que $10^{11} = 3q + 1$. Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$,

$$9^{(10^{11})} = 9^{3q+1} \equiv 2^{3q+1} \equiv 2 \ [7],$$

donc $9^{(10^{11})} + 2 \equiv 0$ [7] et 7 divise cet entier.

Exercice 2.4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$.
Réponse. On écrit l'équation sous forme canonique :

$$(z-2)^2 = -2i.$$

Soit $a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ est une racine carrée de $-2i$. On a les équations suivantes :

$$a^2 - b^2 = 0, \ 2ab = -2, \ a^2 + b^2 = |-2i| = 2,$$

ce qui équivaut à

$$a = \pm 1, b = \pm 1, ab = -1.$$

D'après la dernière équation, a et b sont de signes différents, alors les racines carrées de $-2i$ sont $\pm(1 - i)$. On en déduit la factorisation :

$$(z - 2 - 1 + i)(z - 2 + 1 - i) = 0$$

et donc les solutions sont $z_1 = 3 - i$ et $z_2 = 1 + i$.