Corrigé de certains exercices du TD de logique No 4 (23 et 26 octobre 2015)

On rappelle qu'une *axiomatisation* d'une propriété $\mathcal{P}$ portant sur les $\mathcal{L}$-structures (pour un langage $\mathcal{L}$ fixé) est une $\mathcal{L}$-théorie T telle qu'une $\mathcal{L}$-structure M possède la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si $M \models T$. Si une propriété possède une axiomatisation dans un langage, on dit qu'elle est *axiomatisable* dans ce langage.

Exercice 1. (Ordres)
Dans cet exercice, on travaillera dans le langage $\mathcal{L} = \{<\}$.

1. Donner les axiomes d'ordre total strict.

2. Donner les axiomes d'ordre total strict dense (c'est-à-dire tel que tout intervalle ouvert dont les extrémités sont distinctes soit non-vide). Donner un axiome qui dit que l'ordre a un plus grand élément ; que l'ordre n'a pas de plus grand élément.

3. Trouver un $\mathcal{L}$-énoncé qui est vrai dans $(\mathbb{Z}, <)$ et faux dans $(\mathbb{N}, <)$.

4. Trouver un $\mathcal{L}$-énoncé qui est vrai dans $(\mathbb{Q}, <)$ et faux dans $(\mathbb{Z}, <)$.

5. Trouver une $\mathcal{L}$-formule $\mathrm{Lim}(x)$ à une variable libre telle que pour tous ordinaux $\beta < \alpha$, on ait $(\alpha, <) \models \mathrm{Lim}(\beta)$ si et seulement si β est limite.

6. Soient $n < m$ deux entiers naturels. Trouver un $\mathcal{L}$-énoncé qui est vrai dans $(\omega \cdot n, <)$ et faux dans $(\omega \cdot m, <)$.

Solutions. Il n'y avait eu aucun problème particulier. La formule $\mathrm{Lim}(x)$ dit que $x \neq 0$, et x n'a pas de prédécesseur immédiat, autrement dit :

$$(\exists y\, y < x) \wedge [\forall y\, (y < x \implies (\exists z\, y < z \wedge z < x))].$$

$\omega \cdot n$ contient $n-1$ ordinaux limites, n'en contient pas n distincts, alors que ω_m en contient $m - 1 \geq n$ distincts. On prend donc l'énoncé $\forall x_1, \ldots, x_n \bigwedge_i \mathrm{Lim}(x_i) \implies \bigvee_{i \neq j}(x_i = x_j)$.

Exercice 2. (Corps)
On travaille ici dans le langage des anneaux, $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \times\}$ (où $-$ un symbole de fonction unaire correspondant au passage à l'opposé).

1. Donner les axiomes de corps.

2. Donner un $\mathcal{L}$-énoncé vrai dans $\mathbb{R}$ et faux dans $\mathbb{Q}$.

3. Les propriétés suivantes d'un corps sont-elles axiomatisables ?

   (a) Le fait d'être de caractéristique p pour un nombre premier p fixé ;

(b) Le fait d'être de caractéristique nulle ;

(c) Le fait d'être algébriquement clos.

4. L'ordre sur $\mathbb{R}$ est-il définissable dans $\mathcal{L}$? (Autrement dit, existe-t-il une $\mathcal{L}$-formule $\varphi(x, y)$ telle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on ait $\mathbb{R} \models \varphi(a, b)$ si et seulement si $a < b$?)

Solutions. La seule difficulté du 1 est de ne pas oublier d'axiomes. Toutes les propriétés sont bien axiomatisables, notez que (b) et (c) nécéssitent à première vue une infinité d'énoncés : pour chaque premier p, un énoncé qui dit que $1 + 1 + \cdots + 1$ (p fois) est $\neq 0$; et pour chaque entier $n > 1$, un énoncé qui dit que tout polynôme unitaire de degré n a une racine. [Le théorème de compacité (et un peu d'algèbre) permettra de montrer que (b) et (c) ne peuvent être axiomatisés par un seul énoncé.] On utilisera les abbréviations courantes ... x^n, x^{n-1}, etc. L'ordre (strict) est définissable par la formule $\exists z\, (z \neq 0 \wedge x + z^2 = y)$.

Exercice 3. (Interprétation des termes et formules en théorie des anneaux)
On travaille toujours dans le langage des anneaux, comme dans l'exercice précédent. On notera T la théorie des anneaux, c'est-à-dire la théorie axiomatisant la propriété d'étre un anneau.

1. Soit A un anneau. Montrer que tout $\mathcal{L}$-terme sans paramètre (resp. à paramètre dans A) s'interprète dans A par une fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (resp. à coefficients dans A). Montrer que, réciproquement, une telle fonction polynômiale est toujours l'interprétation d'un tel terme.

2. Montrer que toute formule atomique sans paramètre (resp. à paramètres dans A) $\varphi(x_1, ..., x_n)$ est équivalente, modulo $T \cup \Delta^+(A)$, à une formule de la forme $P(x_1, ..., x_n) = 0$, où $P \in \mathbb{Z}(X_1, ..., X_n)$ (resp. $P \in A(X_1, ..., X_n)$) (cela signifie que $T \models \forall \bar{x}\ \varphi(\bar{x}) = P(\bar{x})$). *Ici, $\Delta^+(A)$ dénote l'ensemble des $\mathcal{L}(A)$-énoncés atomiques vrais dans A.*

Solutions. Il y avait une petite faute dans l'énoncé original du 2 : il faut absolument ajouter à T le *diagramme atomique* de A, autrement c'est faux, je donnerai un exemple ci-dessous.

1. La démonstration est par induction sur la compléxité du terme t. Il faut noter qu'un même polynôme peut être représenté par plusieurs termes distincts. E.g., $2X$ est représenté par $2 \cdot x$ et par $x + x$. On notera $x_1, x_2 \dots$ les variables de nos termes, et $X_1, X_2, \dots$ les variables des polynômes associés.
Si t est une constante du langage (donc $0, 1$ ou un élément a de A), on lui fait correspondre l'élement $0, 1$ ou a de $\mathbb{Z}$, resp., A, vu comme un polynôme sur $\mathbb{Z}$ ou sur A.
Si $t = t_1 + t_2$, terme en $(x_1, \dots, x_n)$, et on a déjà associé $P_1(X_1, \dots, X_n)$ et $P_2(X_1, \dots, X_n)$ à t_1, t_2. Alors on associe $P_1(X_1, \dots, X_n) + P_2(X_1, \dots, X_n)$ à t. Il est clair, par induction, que $P_1 + P_2$ et $t_1 + t_2$ définissent la même fonction $A^n \to A$. On fait pareil pour $t = t_1 \times t_2$ ($P_1 P_2$), et pour $t = -t_1$ ($-P_1$).

2. C'était ici où il y avait un problème. Supposons que nous travaillons dans $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$, qui, par définition, est le langage des anneaux auquel on a adjoint l'ensemble $\{c_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ de nouvelles

constantes. Si on n'ajoute pas comme axiome $c_0 = 0$, une $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$-structure modèle de T pourra interpréter c_0 n'importe comment. Et donc il n'y aura pas de correspondance entre les $\mathcal{L}(A)$-termes et les polynômes à coefficients dans A : si on regarde $\mathbb{R}$ avec sa structure d'anneau naturelle, et dans lequel on interprète c_0 par π, ... il n'y aura aucun polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ correspondant au terme c_0.
Je donne la preuve pour l'anneau A, avec $T \cup \Delta^+(A)$. Notre langage ne contient pas de symbole de relation, toute $\mathcal{L}(A)$-formule atomique sera donc de la forme $t_1 = t_2$. Modulo la théorie des anneaux, elle est équivalente à $t_1 - t_2 = 0$, nous pouvons donc supposer qu'elle est de cette forme. Il faut donc montrer que l'association faite dans 1, qui à un $\mathcal{L}(A)$-terme t associe un polynôme P satisfait la propriété suivante : pour tout modèle B de $T \cup \Delta^+(A)$, et pout tout uplet $\bar{a}$ dans B, on a $t^B(\bar{a}) = P(\bar{a})$. Dans le 1, nous l'avions "montré" pour $B = A$: cela utilisait le fait que nous connaissions déjà l'interprétation des nouvelles constantes. Je note c_a la constante correspondant à $a \in A$, et c_a^B son interprétation dans B. Le fait que $B \models \Delta^+(A)$ veut dire exactement que l'application $f : A \to B$, $a \mapsto c_a^B$, est un homomorphisme d'anneau, a priori ni injectif, ni surjectif ; e.g., $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; mais qui envoie 0 sur $c_0^B = 0^B$ et c_1 sur $c_1^B = 1^B$. Voir aussi l'exercice 4 ci-dessous. A partir de là, on montre par induction sur la compléxité des termes que tout marche bien.

Exercice 4. Soit $\mathcal{L}$ un langage et M une $\mathcal{L}$-structure. On rappelle que $\mathcal{L}(M)$ est le langage obtenu en ajoutant à $\mathcal{L}$ un symbole de constante c_m pour chaque élément m de M, et que le *diagramme simple* de M, noté $\Delta(M)$, est la $\mathcal{L}(M)$-théorie constituée des énoncés atomiques et négations d'atomiques satisfaits dans M (M est canoniquement muni d'une structure de $\mathcal{L}(M)$-structure en interprétant, pour tout $m \in M$, la constante c_m par m). Soit N une $\mathcal{L}$-structure. Montrer que M peut être plongée dans N si et seulement s'il existe une $\mathcal{L}(M)$-expansion de N qui est modèle de $\Delta(M)$.

Solutions. On regarde les deux conditions: (A) : M peut être plongé dans N ; et (B) : la $\mathcal{L}$-structure de N peut être étendue à une $\mathcal{L}(M)$-structure qui en fasse un modèle de $\Delta(M)$.

On regarde l'équation $F(a) = c_a^N$. A partir d'une $\mathcal{L}(M)$-structure sur N, elle nous définit une application $F : M \to N$; et à partir d'une application $F : M \to N$, elle définit une $\mathcal{L}(M)$-structure sur la $\mathcal{L}$-structure N.

On remarque que si $t(x_1, \ldots, x_n)$ est un $\mathcal{L}$-terme et $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$, dans les deux cas (A) et (B), on a

$$F(t^M(a_1, \ldots, a_n)) = t^N(c_{a_1}^N, \ldots, c_{a_n}^N) \ (= t^N(F(a_1), \ldots, F(a_n)). \qquad (*)$$

Dans le cas (A), c'est par définition d'un homomorphisme ; dans le cas (B), c'est parce que $\Delta^+(M)$ (les $\mathcal{L}(M)$-énoncés atomiques satisfaits par M) contient tous les $\mathcal{L}(M)$-énoncés atomiques $c_{t^M(a_1,\ldots,a_n)} = t(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$.

Nous allons d'abord montrer que F est un $\mathcal{L}$-homomorphisme ssi $\mathcal{L}(N) \models \Delta^+(M)$.

Supposons que F soit un $\mathcal{L}$-homomorphisme, et soit $\varphi \in \Delta^+(M)$. Alors φ est ou bien de la forme $t_1 = t_2$, ou bien de la forme $R(t_1, \ldots, t_m)$ pour des $\mathcal{L}(M)$-termes t_i. Mais un $\mathcal{L}(M)$-terme t_i est de la forme $s_i(\bar{c})$, où $\bar{c}$ est un uplet de constantes correspondant à un uplet $\bar{a}$ d'éléments

de M, et s_i est un $\mathcal{L}$-terme. La satisfaction de φ s'écrit donc $R(s_1(\bar{c}), \ldots, s_m(\bar{c}))$ (ou bien $s_1(\bar{c}) = s_2(\bar{c})$).
Puisque $\varphi \in \Delta^+(M)$, on a $M \models R(s_1^M(\bar{a}), \ldots, s_m^M(\bar{a}))$, et comme F est un homomorphisme, on a $N \models R(s_1^N(F(\bar{a})), \ldots, s_m^N(F(\bar{a})))$, i.e., par $(*)$, $N \models R(t_1, \ldots, t_m)$, qui est ce que nous voulions montrer. La preuve pour $t_1 = t_2$ suit en fait directement de $(*)$.
Réciproquement, supposons (B) et montrons que F est bien un homomorphisme. Soit R une relation m-aire, et $a_1, \ldots, a_m \in M$, et supposons que $M \models R(a_1, \ldots, a_m)$. Alors $R(c_{a_1}, \ldots, c_{a_m})) \in \Delta^+(M)$, et donc $N \models R(F(a_1), \ldots, F(a_m))$. Cela prouve que F est bien un $\mathcal{L}$-homomorphisme. Notez que F est aussi un ... $L(M)$-homomorphisme!
Fin de la preuve. Supposons que F soit un plongement, et soit $\varphi \in \Delta(M)$. Si φ est atomique, nous avons déjà montré que $N \models \varphi$, supposons que $\varphi = \neg\psi$, où ψ est atomique. Comme ci-dessus, ψ s'écrit $R(s_1(\bar{c}), \ldots, s_m(\bar{c}))$ ou bien $s_1(\bar{c}) = s_2(\bar{c})$, avec les s_i des $\mathcal{L}$-termes, et $\bar{c}$ un uplet de constantes correspondant à un uplet $\bar{a}$ de M. Je traite le premier cas, le second est similaire. Alors $M \models \varphi$ veut dire $M \models \neg R(\bar{a})$, et comme F est un plongement, cela entraine $N \models \neg R(F(\bar{a}))$, ce qui se retraduit en $N \models \varphi$. Pour l'autre direction, il faut montrer que si $\bar{a}$ est un uplet dans M qui ne satisfait pas une relation R (R pouvant être l'égalité), alors son image dans N ne la satisfait pas non plus : c'est parce que $\neg R(c_{\bar{a}}) \in \Delta(M)$.

Exercice 5. (Préservation)
Soit L un langage. On dit qu'une $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\bar{x})$ est *universelle* si elle est de la forme $\forall \bar{y}\ \psi(\bar{x}, \bar{y})$, avec ψ une formule sans quantificateurs. Elle est dite *existentielle* si elle est de la forme $\exists \bar{y}\ \psi(\bar{x}, \bar{y})$, avec ψ une formule sans quantificateurs. Enfin, elle est dite $\forall\exists$ si elle est de la forme $\forall \bar{y}\ \exists \bar{z} \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, avec ψ une formule sans quantificateurs.

1. Soient M une structure, N une sous-structure de M, $\varphi(\bar{x})$ une $\mathcal{L}$-formule, et $\bar{a} \in N^n$.
   (a) Montrer que si φ est universelle et si $M \models \varphi(\bar{a})$, alors $N \models \varphi(\bar{a})$.
   (b) Montrer que si φ est existentielle et si $N \models \varphi(\bar{a})$, alors $M \models \varphi(\bar{a})$.
2. Soit $(I, <)$ un ensemble ordonné filtrant, i.e. pour tous $i, j \in I$, il existe k tel que $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$. On considère une famille $(M_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{L}$-structures telle que M_i soit une sous-structure de M_j si $i \leqslant j$.
   (a) Montrer qu'on peut munir $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ d'une unique structure de $\mathcal{L}$-structure de telle sorte que pour tout $i \in I$, M_i est une sous-structure de M.
   (b) Soient $\varphi(\bar{x})$ une $\mathcal{L}$-formule $\forall\exists$ et $\bar{a} \in \left(\bigcap_{i \in I} M_i\right)^n$. Montrer que si pour tout $i \in I$, on a $M_i \models \varphi(\bar{a})$, alors $M \models \varphi(\bar{a})$.

On verra des réciproques pour ces propriétés de préservation quand on aura un peu plus d'outils à notre disposition.

Solutions. 1. Je ne l'ai pas fait dans le groupe du lundi. C'est facile, et **les résultats seront supposés connus**. La première chose à remarquer est que, si $\varphi(\bar{x})$ est une formule **sans quantificateurs**, et si $\bar{a}$ est un uplet dans M, alors

$$M \models \varphi(\bar{a}) \textbf{ si et seulement si } N \models \varphi(\bar{a}).$$

C'est montré par induction sur la compléxité des formules : pour les formules atomiques c'est par définition de sous-structure, et cette propriété est clairement préservée par connecteurs.

A partir de là, tout est simple : pour (a), $\varphi(\bar{x})$ s'écrit $\exists \bar{y}\, \psi(\bar{x}, \bar{y})$ où $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ est sans quantificateurs. Si $M \models \varphi(\bar{a})$, il existe donc un uplet $\bar{b}$ dans M tel que $M \models \psi(\bar{a}, \bar{b})$, d'où $N \models \psi(\bar{a}, \bar{b})$ (puisque ψ est sans quantificateurs) et $N \models \varphi(\bar{a})$. Le (b) est simplement la contraposée : la négation d'une formule existentielle est une formule universelle.

2. (a) L'univers de M est donc l'union des univers des M_i (I est non vide). Si c est un symbole de constante, alors c est interprété par le même élément dans tous les M_i, et on prend pour c^M cet élément. Si R est une relation n-aire, on prend $R^M = \bigcup_{i \in I} R^{M_i}$, et si f est une fonction n-aire, on prend $f^M = \bigcup_{i \in I} f^{M_i}$. Montrons que chaque M_i est bien une sous-structure de M : pour les constantes du langage, c'est clair. Soit R un symbole de relation n-aire et $i \in I$. On veut montrer que $R^{M_i} = R^M \cap M_i^n$. On utilise maintenant que I est filtrant et que $R^{M_j} \cap M_k^n = R^{M_k}$ si $k \leq j$, pour obtenir

$$R^M \cap M_i^n = \Big(\bigcup_{j \in I, j \geq i} R^{M_j} \Big) \cap M_i^n = \bigcup_{j \in I, j \geq i} (R^{M_j} \cap M_i^n) = R^{M_i}.$$

Soit maintenant f une fonction n-aire. Si $i < j$ et $\bar{a} \in M_i$ alors $f^{M_i}(\bar{a}) = f^{M_j}(\bar{a})$, et la formule $f^M = \bigcup_{i \in I} f^{M_i}$ définit donc bien une fonction f sur M^n, qui prolonge chacune des f^{M_i}. Cela termine la preuve que M est une extension de chacune des M_i.

(b) Notre formule $\varphi(\bar{x})$ s'écrit donc $\forall \bar{y}\, \exists \bar{z}\, \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, où $\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est sans quantificateurs. Nous voulons montrer que $M \models \varphi(\bar{a})$. Il faut donc montrer que pour tout uplet $\bar{b}$ de M il existe un uplet $\bar{c}$ de M tel que $M \models \psi(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$. Soit $\bar{b}$ un uplet de M. Comme I est filtrant, il existe $i \in I$ tel que tous les éléments de $\bar{b}$ sont dans M_i (ainsi que les éléments de $\bar{a}$, par hypothèse). Comme $M_i \models \varphi(\bar{a})$, il existe un uplet $\bar{c}$ dans M_i tel que $M_i \models \psi(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$. Et parce que ψ est sans quantificateurs, on a $M \models \psi(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$. Cela montre que $M \models \varphi(\bar{a})$.

Remarque : On aurait pu imposer des conditions plus faibles sur les M_i, il suffirait, pour un $\bar{a}$ appartenant à un M_i fixé, que l'ensemble $\{j \in I \mid j \geq i,\ M_j \models \varphi(\bar{a})\}$ soit cofinal dans I.

Exercice 6. (Clôture algébrique)
Dans cet exercice, on fixe un langage $\mathcal{L}$, et M une $\mathcal{L}$-structure. Soit $\varphi(\bar{x})$ une $\mathcal{L}$-formule. On appelle *sous-ensemble de M^n défini par φ*, l'ensemble $\varphi(M) := \{\bar{b} \in M^n \mid M \models \varphi(\bar{b})\}$. De même, si $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ est une formule, et $\bar{c} \in M^m$, on note $\psi(M, \bar{c}) := \{\bar{b} \in M^n \mid M \models \psi(\bar{b}, \bar{c})\}$.
Soit $A \subseteq M$. On dit que $d \in M$ est A-algébrique s'il existe $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ et $a_1, .., a_n \in A$ tels que $\mathcal{M} \models \varphi(d, \bar{a})$ et $\varphi(M, \bar{a})$ est fini. On note $\mathrm{acl}_M(A)$ l'ensemble des éléments de M qui sont A-algébriques.

1. Montrer que $|\operatorname{acl}_M(A)| \leq \max(|A|, |\mathcal{L}|, \aleph_0)$. (Ici, $|-|$ dénote la cardinalité).

2. Montrer que si $A \subseteq B$, alors $\operatorname{acl}_M(A) \subseteq \operatorname{acl}_M(B)$.

3. Montrer que $\operatorname{acl}_M(\operatorname{acl}_M(A)) = \operatorname{acl}_M(A)$.

4. Montrer que si $d \in \operatorname{acl}_M(A)$, alors $d \in \operatorname{acl}_M(A_0)$ pour un $A_0 \subseteq A$ fini.

5. Soit σ un automorphisme de $\mathcal{M}$ qui fixe A, montrer que si $d \in \operatorname{acl}_M(A)$, alors d a une orbite finie sous σ, i.e., $\{\sigma^n(d) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est fini.

6. Si $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, <)$, déterminer $\operatorname{acl}_M(\mathbb{Q})$.

Solutions. Notez tout d'abord une formulation équivalente : $d \in \operatorname{acl}_M(A)$ ssi il existe une $\mathcal{L}(A)$-formule φ en une variable libre telle que $\varphi(M)$ soit fini. J'ai remplacé le uplet $\bar{a}$ de "paramètres" dans la définition, par le uplet correspondant de constantes. Notez aussi que A est n'importe quel sous-ensemble de M, n'a pas besoin d'être une sous-structure.

1. Il y a au plus $|\mathcal{L}| + |A| + \aleph_0$ formules en une variable, et chaque élément de $\operatorname{acl}_M(A)$ a besoin d'une telle formule.

2. Evident : $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(B)$.

4. Evident aussi : la formule qui montre que $d \in acl_M(A)$ n'utilise qu'un nombre fini d'éléments de A.

3. Il est clair que $\operatorname{acl}_M(A) \subseteq \operatorname{acl}_M(\operatorname{acl}_M(A))$, il faut montrer l'autre direction. Soit $c \in \operatorname{acl}_M(\operatorname{acl}_M(A))$, et soient $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ une $\mathcal{L}$-formule, et $a_1, \ldots, a_n \in \operatorname{acl}_M(A)$ tels que $\varphi(M, a_1, \ldots, a_n)$ soit fini (disons de cardinalité N) et contienne c. Soient $\theta_1(y_1), \ldots, \theta_n(y_n)$ les $\mathcal{L}(A)$-formules qui témoignent du fait que $a_1, \ldots, a_n \in \operatorname{acl}_M(A)$. Je regarde aussi la $\mathcal{L}$-formule

$$\psi(y_1, \ldots, y_n) := \forall x_0, \ldots, x_N \bigwedge_i \varphi(x_i, y_1, \ldots, y_n) \implies \bigvee_{0 \leq i < j \leq N} x_i = x_j.$$

Cette formule dit donc qu'il y a au plus N éléments distincts x qui satisfont $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$, et elle est satisfaite par $(a_1, \ldots, a_n)$. [On la note parfois aussi $\exists^{\leq N} x\, \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$.] Je considère donc la $\mathcal{L}(A)$-formule

$$\rho(x) = \exists y_1, \ldots, y_n \, (\bigwedge_i \theta_i(y_i)) \wedge \varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \wedge \psi(y_1, \ldots, y_n).$$

On calcule alors que $|\rho(M)| \leq N \prod_i |\theta_i(M)|$; et bien sûr $M \models \rho(a)$.

5. Un automorphisme σ est une application $M \to M$ qui est un isomorphisme. On note $\operatorname{Aut}(M/A)$ ou bien $\operatorname{Aut}_A(M)$ l'ensemble des automorphismes de M qui fixent tous les éléments de A. [Alors $\operatorname{Aut}(M/A)$ est aussi l'ensemble des automorphismes de la $\mathcal{L}(A)$-structure M. C'est un groupe, la loi de groupe étant la composition.] Mais un isomorphisme préserve **toutes** les $\mathcal{L}$-formules, et si de plus il fixe A, il préserve toutes les $\mathcal{L}(A)$-formules. Donc, si $\varphi(x)$ est la formule qui montre que $d \in \operatorname{acl}_M(A)$, alors $\sigma(d), \sigma^2(d), \ldots$ la satisferont aussi. Comme l'ensemble $\varphi(M)$

est fini, l'ensemble $\{\sigma^i(d) \mid i \in \mathbb{N}\}$ est donc fini.
Notons que le même raisonnement donne que $\{\tau(M) \mid \tau \in \mathrm{Aut}(M/A)\}$ est fini, puisque contenu dans $\varphi(M)$.

6. $M = \mathbb{R}$ avec son ordre naturel, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Alors $\mathrm{acl}_M(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. En effet, soit $d \in \mathrm{acl}_M(\mathbb{Q})$, et prenons $A_0 \subset \mathbb{Q}$ fini tel que $d \in \mathrm{acl}_M(A_0)$. Disons, $A_0 = \{a_1, \ldots, a_n\}$, avec $a_i < a_j$ pour $i < j$. Si d est l'un des a_i il n'y a rien à prouver, $d \in \mathbb{Q}$. Supposons que non, et posons $a_0 = -\infty$, et $a_{n+1} = +\infty$. Il existe donc un indice i (avec $0 \leq i \leq n$) tel que $a_i < d < a_{i+1}$. Les propriétés des réels nous donnent facilement un automorphisme σ de $\mathbb{R}$ qui est l'identité sur $]-\infty, a_i] \cup [a_{i+1}, +\infty[$, et dont le graphe sur l'intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ est strictement au-dessus du graphe de $y = x$. Alors $\{\sigma^i(d) \mid i \in \mathbb{N}\}$ sera infini, ce qui contredit le fait que $d \in \mathrm{acl}_M(\mathbb{Q})$.
Notez qu'il était important de passer à A_0 avant d'appliquer 5, puisque $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) = (1)$.

Exercice 7. (Clôture définissable)
On reprend les notations de l'exercice précédent. Si dans la définition de la clôture algébrique, au lieu d'exiger que l'ensemble $\phi(M, \bar{a})$ soit fini, on exige qu'il soit égal à $\{d\}$, on dira que d est A-définissable (dans M). L'ensemble des éléments A-définissables forme la clôture définissable de A, notée $\mathrm{dcl}_M(A)$. On a en particulier $\mathrm{dcl}_M(A) \subseteq \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$.

1. Faites les question 1 à 4 de l'exercice précédent, en remplacant acl par dcl.

2. Quel est le bon analogue de la question 5 de l'exercice précédent ?

3. Soit $M = (\mathbb{R}, +, 0, <)$. Montrez que $\mathrm{acl}_M(A) = \mathrm{dcl}_M(A)$ pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, et que $\mathrm{dcl}(\{1\}) = \mathrm{dcl}(\mathbb{Z}) \supseteq \mathbb{Q}$. L'égalité est vraie, mais un peu difficile à montrer maintenant car elle exige des outils plus forts.

Solutions. 1. C'est pareil que l'exercice 6, mais plus facile.

2. On aura que $\{\sigma^n(d) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{d\} = \{\tau(d) \mid \tau \in \mathrm{Aut}(M/A)\}$.

3. Soit $a \in \mathrm{acl}_M(A)$, $\varphi(x)$ la $\mathcal{L}(A)$-formule qui le montre, et $a = a_1, a_2, \ldots, a_n$ les éléments de $\varphi(M)$. Comme l'ordre est total, il existe une permutation τ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $a_{\pi(1)} < a_{\pi(2)} < \cdots < a_{\pi(n)}$. Je prend la formule qui exprime la propriété suivante : a est le $\pi^{-1}(1)$-ième élément satisfaisant φ. Elle définit a uniquement. Notez que je n'ai utilisé que les symboles de φ et l'ordre.
Certainement $\mathrm{acl}_M(\{1\})$ contient la sous-structure de $\mathbb{R}$ engendrée par 1, et donc $\mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $-n$ est définissable sur $\{n\} \subset \mathrm{dcl}_M(\{1\})$ par la formule $x + n = 0$, et donc $\mathrm{dcl}_M(\{1\})$ contient $\mathbb{Z}$. Soient $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^{>0}$. Alors n/m est définissable (sur $\{n\} \subset \mathrm{dcl}_M(\{1\})$) par la formule $\ldots$ $x + x + \cdots + x = n$, où il y a m termes dans la somme de gauche. [Nous n'avons pas la multiplication dans le langage, de même que nous n'avions pas la soustraction].