Exposés pour le groupe de travail Corps réels clos et Théories o-minimales. Printemps 2021

1 – Algorithme de Sturm pour les corps réels clos. Par exemple, dans Lang's Algebra 3[e] édition, chapitre 11, section 11. (Court : pour une personne)
L'algorithme de Sturm permet de calculer le nombre de racines d'un polynôme dans un intervalle. Le livre de Lang est disponible sur la plate-forme Springer (accessible à partir du site de la bibli de l'ENS).

2 – section 2 de [PiS]
Un groupe ordonné o-minimal est commutatif et divisible. Un corps ordonné o-minimal est réel clos. (Court : pour une personne)

3 – Décomposition cellulaire dans les structures o-minimales (le cas général).
Nous avons fait un morceau de la preuve pour un sous-ensemble de R^2. Le cas général est similaire, mais bien sûr plus compliqué.
Pages 49 – 58 of [vdD]. Ou bien dans [KPS]. Ou encore dans le blog de Speissegger :
https://ms.mcmaster.ca/~speisseg/blog/?page_id=10646
Ou alors, section 2.2 de [C] , qui est faite dans le cas d'une expansion de corps réel clos.

4 – C. Miller, Exponentiation is hard to avoid, Proc. AMS 122 (1994), 257 – 259. Et C. M., Expansions of the real field with power functions, Ann. Pure Appl. Logic 68 (1994), 79 – 94.
On dit qu'une structure o-minimale (ayant un corps réel clos sous-jacent) est polynomialement bornée si toute fonction définissable sur R est majorée par une puissance de x quand x tend vers l'infini. Le premier article montre que si la structure o-minimale R, avec corps sous-jacent le corps des réels, n'est pas polynomialement bornée, alors on peut y définir l'exponentielle. Le deuxième article étend ce résultat (avec la formulation adaptée) au cas où le corps sous-jacent n'est pas le corps des réels.

5 – Section 5 de [DMM] : O-minimalité et corps de Hardy. (On admettra les résultats des sections précédentes).
Soit A l'anneau des fonctions de **R** dans **R** (le corps des réels). On dit que deux fonctions f et g ont le même germe à l'infini s'il existe a tel que f et g sont égales sur l'intervalle $(a,+\infty)$. La classe d'équivalence d'une fonction f pour cette relation d'équivalence est appelée le *germe* de f (à l'infini). Les germes forment un anneau, et un corps de Hardy est un sous-corps H de cet anneau, qui de plus est clos par dérivation. (Si f et g ont le même germe, leurs dérivées aussi). Tous les germes de H sont en particulier représentés par des fonctions différentiables. Le corps H est ordonnable, car tout élément non nul est inversible, et donc représenté par un germe qui est >0 ou <0 sur un intervalle cofinal de **R**. On se sert de ces corps pour prouver l'o-minimalité de **R**_{an,exp}.

6 – "Complex analysis" in an o-minimal structure expanding an RCF. Dans [PeS].
Si R est un corps réel clos dont la théorie est o-minimale, alors R(i) est un corps algébriquement clos, et on peut essayer de faire de l'analyse complexe sur R(i). L'article fait 35 pages, on pourrait essayer d'en faire des morceaux. Il faut s'y mettre à plusieurs.

7 – Applications des résultats sur les corps réels clos : morceaux choisis des pages 54 – 61 de [Pr]. Plusieurs jolies applications, dont par exemple H17 : si un polynôme à coefficients réels ne prend que des valeurs non-négatives, alors c'est une somme de carrés. Les Nullstellensätze réel et classique.

8 – J. Pila, Integer points on the dilation of a subanalytic surface, Quart. J. of Math. 55 (2004), 207 – 223. Faire les sections 3 et 4. Cela ne nécessite pas de connaissances particulières et c'est utilisé dans la preuve de Pila-Wilkie.

Les articles 9 – 13 sont assez difficiles et les preuves demandent des connaissances que vous n'avez probablement pas. Essayez quand même d'énoncer les résultats principaux, et quelques ingrédients de preuve. De toute façon je vous aiderai.

9 – R. Bianconi, Undefinability results in o-minimal expansions of the real numbers, Annals of Pure and Applied Logic 134 (2005) 43 – 51.
Il utilise des résultats du 2e papier de Miller, que vous pourrez admettre. Il donne des critères de (non-)définissabilité de fonctions puissance f(a)=a^r, r un réel, et d'autres fonctions analytiques. (Compliqué à énoncer sans symboles mathématiques)
10 – G. Jones, J. Kirby, T. Servi, Local interdefinability of Weierstrass elliptic functions, JIMJ (2016) 15(4), 673 – 691.
11 – M. Bays, J. Kirby, A.J. Wilkie, A Schanuel property for exponentially transcendental powers, Bull. London Math. Soc. 42 (2010) 917 – 922.
12 – G.O. Jones, A.J. Wilkie, Locally polynomially bounded structures, Bull. LMS 40 (2008), 239 – 248.
13 – J. Pila, U. Zannier, Rational points in periodic analytic sets and the Manin-Mumford conjecture, Rend. Lincei Mat. Appl. 19 (2008), 149 – 162.

Références

[C] M. Coste, An introduction to o-minimality. Disponible à http://perso.univ-rennes1.fr/michel.coste/polyens/OMIN.pdf
[vdD] Lou van den Dries, Tame topology and o-minimal structures, LMS Lecture Note series 248, (1998).
[DMM] Lou van den Dries, Angus Macintyre, Dave Marker, The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation, Annals of Mathematics, second series, Vol, 140 No 1, 183 – 205.
[KPS] J. Knight, A. Pillay, C. Steinhorn, Definable sets in ordered structures. II. *Trans. Amer. Math. Soc.* 295 (1986), no. 2, 593–605.
[PeS] Ya'acov Peterzil, Sergei Starchenko, Expansions of algebraically closed fields in o-minimal structures. *Selecta Math. (N.S.)* 7 (2001), no. 3, 409 - 445.
[PiS] Anand Pillay and Charles Steinhorn, Definable sets in ordered structures, Trans. Amer. Math. Soc. **295** (1986), 565-592.
[Pr] A. Prestel, Lectures on formally real fields, Springer Lecture Notes 1093.