Compléments au cours du 14 avril 2022

1.1. Hypothèses. G une variété abélienne (ou semi-abélienne - certains des résultats passent), et X une sous-varieété de G. G est définie sur un corps de nombres K et X sur $\mathbb{C}$. Mais ce n'est pas important pour ce qui suit. Le résultat que nous utiliseront tout le temps:
Si G est une variété abélienne (ou semi-abélienne) définie avec des équations à coefficients dans le corps algébriquement clos L, alors elle n'a qu'un nombre dénombrable de sous-groupes algébriques, et ceux-ci sont définis sur le corps L.

1.2. Remarques sur SpL. Appelons *coset (de H)* un translaté d'un sous-groupe algébrique (H) de G. Si $H \leq G$ est un sous-groupe algébrique, on définit $\mathrm{SpL}(X, H)$ comme étant l'union des cosets de H contenus dans X. C'est un ensemble algébrique (= définissable par des équations polynomiales).
Puis $\mathrm{SpL}(X)$ est l'union des $\mathrm{SpL}(X, H)$, où H varie sur l'ensemble (dénombrable) des sous-groupes algébriques **non-triviaux** de G.
Remarquons que si $H' \leq H$, alors $\mathrm{SpL}(X, H')$ contient $\mathrm{SpL}(X, H)$; que si $x \in g + H$ alors $g + H = x + H$; et que si $g + H' \subset g + H \subseteq X$ alors on peut omettre $g + H'$ de l'union.
Il suit que $\mathrm{SpL}(X)$ est l'union des cosets maximaux contenus dans X, et donc des $\mathrm{SpL}(X, H)$ où H parcourt l'ensemble des sous-groupes de G qui sont maximaux pour X. Mais il se peut que si H est maximal pour X, alors certains cosets $g+H \subset X$ ne sont pas maximaux. (Rappel: *H est maximal pour X* s'il existe $g \in G$ tel que $g + H \subset X$ soit maximal.)

Preuve de $\mathrm{SpL}(X)$ fermé dans X

Tout d'abord, au contraire de ce que j'ai énoncé, nous allons le montrer pour une famille de **fermés** $(X_a)_{a \in A}$. Autrement, les notions de stabilisateurs et de SpL n'ont pas beaucoup de sens. Par contre, l'ensemble A est seulement supposé constructible.

1.3. Réduction aux irréductibles dans la famille (X_a). Il est connu que si la famille $(X_a)_{a \in A}$ est une famille de fermés, alors il existe une famille $(Y_b)_{b \in B}$, où chaque Y_b est irréductible et fermé, et de plus $X_a = \bigcup_{b \in I(a)} Y_b$ pour un ensemble fini $I(a)$ définissable uniformément sur A. C'est utilisé quand on regarde la famille $X'_{a,h}$, qui a priori n'est pas une famille d'ensembles irréductibles.
Je n'ai pas dit cela dans le "film": la preuve est par induction sur $\dim(G)$, puis sur $\dim(X_a)$.

1.4. Réduction aux X_a de stabilisateur fini. Puisque tout est définissable dans ACF_0, on sait que l'ensemble A' des $a \in A$ tel que $\mathrm{Stab}(X)$ est fini, est définissable, car la taille des stabilisateurs est bornée pour $a \in A'$. Son complémentaire est aussi définissable. Nous avons montré dans un lemme précédent que

$$\mathrm{Stab}(X) \text{ infini} \iff \mathrm{SpL}(X) = X.$$

Soit $a \in A \setminus A'$. Alors nous savons que $X_a = \mathrm{SpL}(X_a, H)$ où H est la composante connexe de $\mathrm{Stab}(X_a)$. De plus, l'ensemble A_H des $b \in A$ tels que H est la composante connexe de

$\text{Stab}(X_b)$ est définissable sur $\mathbb{Q}^{alg}$, car H et la famille (X_a) le sont. Notons que cela donne une partition finie de $A \setminus A'$ en ensembles définissables $S_1, \ldots, S_k$, avec sur chaque $S_i = A_{H_i}$, H_i est la composante connexe de $\text{Stab}(X_b)$.

On considère l'application canonique $\pi : G \to G/H$. Alors G/H est une variété abélienne, et chaque $\pi(X_b/H)$ est irréductible, de stabilisateur fini dans G/H. L'hypothèse d'induction s'applique donc ($\dim(G/H) = \dim(G) - \dim(H)$) pour donner que l'ensemble des sous-groupes de G/H maximaux pour X_b/H dans G/H, $b \in A_H$, est fini. Ces sous-groupes maximaux se relèvent aux sous-groupes maximaux pour X_b dans G, auxquels il faut peut-être ajouter H. Cela prouve le résultat quand $a \in A \setminus A'$, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de stabilisateurs infinis à considérer.

Il reste à montrer l'assertion pour $a \in A'$, et donc $X_a \neq \text{SpL}(X_a)$. On prend un H_0, avec $g + H_0 \subset X_a$ maximal, et on prend $h \in H_0 \setminus \text{Stab}(X_a)$, on définit $X'_{a,h} = X_a \cap (X_a + h)$. Alors $g + H_0 \subset X'_{a,h}$, et est donc maximal pour $X'_{a,h}$. Cependant, $\dim(X'_{a,h}) < \dim(X_a)$, et l'hypothèse d'induction s'applique à la famille $(X'_{a,g})$, $a \in A'$, $X_a \neq (X_a + g)$. (Chaque $X'_{a,g}$ est fermé, l'ensemble des paires (a, g) apparaissant est constructible.)

1.5. Preuve que le Lemme implique le Théorème.
On suppose vrai que si X et G sont définis sur $\mathbb{Q}^{alg}$, $\text{Stab}(X)$ est fini, alors $(X \setminus \text{SpL}(X)) \cap \text{Tor}(G)$ est fini. Ceci étant vrai pour toute variété abélienne G et sous-variété X satisfaisant les hypothèses.

Soit donc X une sous-variété de G, irréductible, et telle que $X \cap \text{Tor}(G)$ est Zariski dense dans X. Comme $\text{Tor}(G) \subset (\mathbb{Q}^{alg})^n$, et donc aussi $X \cap \text{Tor}(G)$, X doit être défini sur $\mathbb{Q}^{alg}$. Soit H la composante connexe de $\text{Stab}(X)$, et soit $\pi : G \to G/H$ la projection. Alors X/H est irréductible, défini sur $\mathbb{Q}^{alg}$ puisque H l'est, et $\text{Stab}_{G/H}(X/H)$ est fini. Nous sommes donc dans les hypothèses du Lemme:

$$(X/H \setminus \text{SpL}(X/H)) \cap \text{Tor}(G/H) \text{ est fini.}$$

De plus, par un des premiers lemmes sur SpL, on sait que $X/H \neq \text{SpL}(X/H)$, et par un autre lemme, que $\text{SpL}(X/H)$ est fermé dans X/H. Nous savons aussi que $\text{Tor}(G/H) \cap X/H$ est Zariski dense dans X/H. Comme $\dim(\text{SpL}(X/H)) < \dim(X/H)$, il est impossible que l'union de $\text{SpL}(X/H)$ avec l'ensemble fini $(X/H \setminus \text{SpL}(X/H)) \cap \text{Tor}(G/H)$ soit Zariski dense dans X/H, à moins que X/H ne soit réduit à un point (puisqu'il est fermé et irréductible; et dans ce cas on a $\text{SpL}(X/H) = \emptyset$). $\square$

References

[1] J. Pila, U. Zannier, Rational points in periodic analytic sets and the Manin-Mumford conjecture, Rend. Lincei Mat. Appl. 19 (2008), 149 - 162.