Dans le Théorème 8 : (1) peut être remplacé par :
F a un ordre pour lequel il est maximalement ordonné.
En effet, dans ce cas, S_F est un cône positif, donc l'ordre est unique par (a) du Thm 7.

J'avais donné comme exercice le fait de décrire tous les cônes positifs de $\mathbb{Q}[X]$. Si vous trouvez cela difficile, remplacez $\mathbb{Q}$ par $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$.

Théorie de Galois infinie. Soit K un corps
En caractéristique $p > 0$, on regarde la clôture séparable de K, notée K^s ; c'est l'union de toutes les extensions de Galois finies de K. Je note $\mathcal{G}$ l'ensemble des extensions de Galois finies de K.

Si $L \subset M \in \mathcal{G}$ on a une surjection $\pi_{ML} : \mathrm{Gal}(M/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$ donnée par la restriction. Cela nous donne un système inverse dirigé $(\mathrm{Gal}(L/K) ; \pi_{ML}, L \subset M \in \mathcal{G})$ et on a $\mathrm{Aut}(K^s/K) = \mathrm{Gal}(K^s/K) = \varprojlim_{L \in \mathcal{G}} \mathrm{Gal}(L/K)$

Concrètement : on regarde $\prod_{L \in \mathcal{G}} \mathrm{Gal}(L/K)$, muni de la topologie produit, chaque $\mathrm{Gal}(L/K)$ étant discret. Ce produit est compact, Hausdorff, totalement discontinu. On a

$$\mathrm{Gal}(K^s/K) = \{ (g_L)_{L \in \mathcal{G}} \mid \text{si } L \subset M,\ \pi_{ML}(g_M) = g_L \}$$

un sous-groupe fermé de $\prod_L \mathrm{Gal}(L/K)$, donc compact.

Dualité de Galois :

$$K \subset E \subset K^s \longleftrightarrow \mathrm{Gal}(K^s/E), \text{ sous-groupe fermé de } \mathrm{Gal}(K^s/K)$$

$$\mathrm{Fix}(H) \longleftarrow H$$

Si $[E:K] < \infty$ alors $\mathrm{Gal}(K^s/E)$ est ouvert

Results of quantifier élimination

The theory ACF of algebraically closed fields in the language of rings $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$ has quantifier elimination: if $\varphi(\bar{x})$ is a formula, then there is a quantifier-free formula $\psi(\bar{x})$ such that

$$ACF \models \forall \bar{x} \quad \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}).$$

Sets defined (in a field) by quantifier-free formulas are called constructible.

Quantifier elimination says: if $S \subset K^{n+1}$ is constructible, K algebraically closed field ($K \models ACF$) and π is the projection on the first n coordinates, then $\pi(S)$ is constructible.

The theory $RCF_<$ of real closed fields in the language of ordered rings $\{+, -, \cdot, 0, 1, <\}$ has quantifier elimination.

Sets defined (in an ordered field) by quantifier-free formulas are called semi-algebraic.

Examples of qf flas:

$f(\bar{x}) = 0$ $\qquad f \in \mathbb{Z}[\bar{x}]$ without parameters

$f(\bar{x}) \geq 0$ $\qquad f \in \mathbb{R}[\bar{x}]$ with parameters in $\mathbb{R}$.

$f(\bar{x}) > 0$

Exercise Give axiomatisations of the theories ACF and $RCF_<$