Formules et ensembles définissables

Langage = ensemble de relations, fonctions, constante

Exemple : le langage pour les anneaux ordonnés

$\{+, -, \cdot, 0, 1, <\}$

fns c^{te} relation

Symboles logiques : variables $(x, y, x_1, z, \dots)$, $\neg$ (non), $\wedge$ (et), $\vee$ (ou), $\rightarrow$ (implique : $A \rightarrow B$: $\neg A \vee B$).
$\exists$ (il existe), $\forall$ (pour tout) quantificateurs ou quanteurs.

Formules sans quantificateurs : obtenues à partir des formules atomiques en utilisant $\wedge, \vee, \neg$.

Exemples dans notre cas de formules atomiques

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0 \qquad \text{où } f(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$$
$$> 0$$

et ensuite on clos par $\neg, \wedge, \vee$.

Dans le cas des corps réels clos (et surtout de $\mathbb{R}$) ces ensembles sont appelés semi-algébriques

Si $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ est une formule alors $\psi(x_2, \dots, x_n) = \exists x_1 \varphi(x_1, \dots, x_n)$ est une formule.

Si R est une structure du langage.

Une formule $\varphi(\bar{x})$ avec variables "libres" $(x_1, \dots, x_n)$ définira un sous ensemble de R^n, de façon évidente si $\varphi(\bar{x})$ est sans quantificateurs, et en utilisant que l'ensemble défini par $\exists x_1 \varphi(x_1, \dots, x_n)$ est la projection sur les $(n-1)$ dernières coordonnées de l'ensemble défini par φ

$\forall x_1 \varphi(x_1, \dots, x_n)$ est équivalente à : $\neg(\exists x_1 \neg \varphi(x_1, \dots, x_n))$

Ensembles définissables en termes de structures.

Une structure $\mathcal{S}$ sur un ensemble R est un ensemble $\mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}_n$, où $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{P}(R^n)$ est une algèbre de Boole (ie contient R^n, close par $\cap$ et $\cup$ finies et par complémentaire). De plus il faut :

Si $A \in \mathcal{S}_n$, $B \in \mathcal{S}_m$ alors $A \times B \in \mathcal{S}_{n+m}$

Si $A \in \mathcal{S}_n$, $\sigma \in Sym(n)$, alors $A^\sigma \in \mathcal{S}_n$

$$A^\sigma = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}) \in \mathcal{S}_n\}$$

(5) Si $A \in \mathcal{S}_{n+1}$ et $\pi : R^{n+1} \to R^n$ est la projection sur les n dernières coordonnées, alors $\pi(A) \in \mathcal{S}_n$.

On met aussi en général, pour $S \subseteq R$, $\{a\} \in \mathcal{S}_1$, $a \in S$

"Formules sans paramètres" dans notre cas : $S = \mathbb{Z}$

"Formules avec paramètres" : $S = R$.

Typiquement, on commence avec des formules de base, puis on commence à clore par $\cap, \cup, {}^c$, projection, Et on espère s'arrêter un jour.