Théorème de décomposition cellulaire

Quentin VERMANDE

Lemme 1. *Soient X un espace topologique et $(R_1, <), (R_2, <)$ deux ordres linéaires denses sans extrémités. Soit $f : X \times R_1 \to R_2$. Supposons que :*

- *$\forall x \in X, f(x, \cdot)$ est C^0 et monotone sur R_1.*
- *$\forall r \in R, f(\cdot, r)$ est C^0 sur X.*

Alors f est C^0.

Démonstration.

Soit $(x, r) \in X \times R_1$ et I un intervalle ouvert non vide de R_2 contenant $f(x, r)$. Comme $f(x, \cdot)$ est C^0, on a $s, t \in R_1$ tels que $s < r < t$ et $f(x, [s, t]) \subset I$. Comme $f(\cdot, s)$ et $f(\cdot, t)$ sont C^0, on a $V \in \mathcal{V}(X)$ ouvert tel que $f(V, s) \subset I$ et $f(V, t) \subset I$. Comme f est monotone et I est un intervalle, $f(V,]s, t[) \subset I$.

Théorème 1 ([Dri98])**.** *Pour $n \in \mathbb{N}$:*

- (I_n) *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $A_1, ..., A_k \subset R^n$ définissables. Alors il existe une décomposition cellulaire de R^n qui partitionne $A_1, ..., A_k$.*
- (II_n) *Soient $A \subset R^n$ et $f : A \to R$ définissable. Alors il existe une décomposition cellulaire $\mathcal{D}$ de R^n qui partitionne A et telle que $\forall B \in \mathcal{D}, B \subset A \Rightarrow f_{|B}$ est C^0.*
- (III_n) *Soit $A \subset R^{n+1}$ tel que $\forall x \in R^n$, A_x est fini. Alors $\exists k \in \mathbb{N}, \forall x \in R^n, |A_x| \leq k$.*

Démonstration.

Par induction sur n :

(I_1) *Par o-minimalité, $\bigcup_{i=1}^{k} \partial A_i$ est fini, disons $\{x_1 < ... < x_n\}$. On pose $x_0 = -\infty$ et $x_{n+1} = +\infty$. Alors $\{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{]x_i, x_{i+1}[, 0 \leq i \leq n\}$ est une décomposition cellulaire de R qui partitionne $A_1, ..., A_k$.*

(II_1) *Théorème de monotonicité.*

(III_1) *Déjà vu.*

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall m \in [\![1, n]\!], (I_m), (II_m)$ et (III_m).*

  (I_{n+1}) *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $A_1, ..., A_k \subset R^{n+1}$ définissables. Pour $A \subset R^{n+1}$, on pose $\partial_n A = \{(x, r) \in R^{n+1}, r \in \partial A_x\}$.*

  - *Soit $X = \bigcup_{i=1}^{k} \partial_n A_i$. X est définissable et, pour $x \in R^n$, $X_x = \bigcup_{i=1}^{k} \partial (A_i)_x$ est fini. Donc, par (II_n), on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in R^n, |X_x| \leq N$.*

— *Soit, pour* $0 \leq i \leq N$, $X_i = \{x \in R^n, |X_x| = i\}$ *et* $f_{i,1} < ... < f_{i,i} : X_i \to R$ *telles que* $\forall x \in X_i, X_x = \{f_{i,j}(x), 1 \leq j \leq i\}$.
— *Posons, pour* $0 \leq i \leq N, f_{i,0} = (-\infty)_{x \in X_i}$ *et* $f_{i,i+1} = (+\infty)_{x \in B_i}$.
— *Soient, pour* $1 \leq \lambda \leq k$, $0 \leq i \leq N$ *et* $1 \leq j \leq i, C_{\lambda,i,j} = \{x \in X_i, f_{i,j}(x) \in (A_\lambda)_x\}$.
— *Soient, pour* $1 \leq \lambda \leq k$, $0 \leq i \leq N$ *et* $0 \leq j \leq i, D_{\lambda,i,j} = \{x \in X_i,]f_{i,j}(x), f_{i,j+1}[\subset (A_\lambda)_x\}$.
— *Par* (II_n) *et* (III_n)*, on a une décomposition cellulaire* $\mathcal{D}$ *de* R^n *qui partitionne les* X_i*, les* $C_{\lambda,i,j}$ *et les* $D_{\lambda,i,j}$ *telle que* $\forall C \in \mathcal{D}, \forall 0 \leq i \leq N, C \subset X_i \Rightarrow \forall 1 \leq j \leq i, f_{i,j}$ *est* C^0 *sur* C.
— *Soit* $C \in \mathcal{D}$.
  — *Si* $\forall 0 \leq i \leq N, C \cap X_i = \varnothing$*, on pose* $D_C = \{C \times R\}$.
  — *Sinon soit* $0 \leq i \leq N$ *tel que* $C \subset X_i$. *On pose* $D_C = \{\Gamma(f_{i,j}), 1 \leq j \leq i\} \cup \{]f_{i,j}, f_{i,j+1}[, 0 \leq j \leq i\}$.
— *On pose* $\mathcal{D}' = \bigcup_{C \in \mathcal{D}} D_C$. $\mathcal{D}'$ *est une décomposition cellulaire qui partitionne* $A_1, ..., A_k$.

(II_{n+1}) *Soient* $A \subset R^{n+1}$ *et* $f : A \to R$ *définissable. Par* (I_{n+1})*, il suffit de montrer qu'il existe* $A_1, ..., A_k \subset R^{n+1}$ *définissables tels que* $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ *et* $\forall 1 \leq i \leq k, f$ *est* C^0 *sur* A_k. *Par* (I_{n+1}) *quitte à réduire* A*, OPS que* A *est une cellule.*
— *Si* A *n'est pas ouvert, soit* p_A *l'homéomorphisme de* A *sur une cellule ouverte de* R^m *(avec* $m = dim(A)$*).* $f \circ p_A^{-1}$ *est définissable et* $m < n+1$*, donc par* (II_m)*, on a une décomposition cellulaire* $\mathcal{D}$ *de* R^m *telle que* $\forall C \in \mathcal{D}, C \subset p_A(A) \Rightarrow f \circ p_A^{-1}$ *est* C^0 *sur* C. *On a* $A = \bigcup_{\substack{C \in \mathcal{D} \\ C \subset p_A(A)}} P_A^{-1}(C)$ *et, pour* $C \in \mathcal{D}$ *tel que* $C \subset p_A(A)$*,* f *est* C^0 *sur* $p_A^{-1}(C)$*. D'où le résultat.*
— *Supposons* A *ouverte. Soit* $A^* = \{(x,r) \in A, \exists B \subset R^n$ *boîte ouverte,* $\exists a < b \in R, B \times]a,b[\subset A \wedge \forall x \in B, f(x,\cdot)$ *est* C^0 *et monotone* $\wedge f(\cdot,r)$ *est* C^0 *en* $x\}$.
— *Montrons que* A^* *est dense dans* A*. Soient* $B \subset R^n$ *boîte ouverte et* $a < b \in R$ *tels que* $B \times]a,b[\subset A$*. Pour* $x \in B$*, par le théorème de monotonicité,* $\lambda(x) = \sup\{c \in]a,b[, f(x,\cdot)$ *est* C^0 *et monotone sur* $]a,c[\}$ *est bien défini.* λ *est définissable, donc par* (II_n)*, on a une décomposition cellulaire* $\mathcal{D}$ *de* R^n *qui partitionne* B *telle que* $\forall C \in \mathcal{D}, C \subset B \Rightarrow \lambda$ *est* C^0 *sur* C*.* B *est ouvert, donc on a une cellule* $C \in \mathcal{D}$ *ouverte telle que* $C \subset B$*.* C *est ouverte, donc on a une boîte ouverte* B' *de* R^n *telle que* $B' \subset C$*. Soit* $x \in B'$*. On a* $\lambda(x) \in]a,b[$ *et* λ *est* C^0 *en* x*, donc, avec* $c \in]a, \lambda(x)[$*, quitte à réduire* B' *on peut supposer* $\lambda(B') \subset]c,b[$*. Soit* $r \in]a,c[$*. Comme* B' *est ouvert, par* (II_n)*, on a* $C \subset B'$ *une cellule ouverte telle que* $f(\cdot,r)$ *est* C^0 *sur* C*. Alors* $C \times \{r\} \subset A^*$*. Donc* $A^* \cap B \times]a,b[\neq \varnothing$.

— *Par* (I_{n+1}), *on a* $\mathcal{D}$ *une décomposition cellulaire de* R^{n+1} *qui décompose* A *et* A^*. *Soit* $C \in \mathcal{D}$ *telle que* $C \subset A$.

— *Si* C *n'est pas ouverte, on est ramené au cas précédent.*

— *Supposons* C *ouverte. Alors* $C \cap A^* \neq \varnothing$, *donc* $C \subset A^*$. *Soit* $(p, r) \in C$. *On a* $B \subset R^n$ *boîte ouverte et* $a < b \in R$ *tels que* $B \times]a, b[\subset A$ *et* $\forall x \in B, f(x, \cdot)$ *est* C^0 *et monotone sur* $]a, b[$ *et* $\forall r \in]a, b[$, $f(\cdot, r)$ *est* C^0 *sur* B. *Donc* f *est* C^0 *en* (p, r). *Donc* f *est* C^0 *sur* C.

(III_{n+1}) *Soit* $A \subset R^{n+2}$ *telle que* $\forall x \in R^{n+1}, A_x$ *est fini.*

— *Soit* B *une boîte ouverte de* R^{n+1}. *On dit que* B *est* A*-bonne si, pour* $x \in B$ *et* $r \in A_x$, *il existe* $I \subset R$ *intervalle ouvert contenant* r *et* $f : B \to R$ C^0 *tels que* $A \cap (B \times I) = \Gamma(f)$.

— *Soit* $B \subset R^{n+1}$ *boîte ouverte non vide* A*-bonne. Alors il existe* $f_1 < \ldots < f_k : B \to R$ C^0 *tels que* $A \cap (B \times R) = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma(f_i)$.

— *Soit* $x \in B$. *Posons* $A_x = \{r_1 < \ldots < r_k\}$. *Soit, pour* $1 \leq i \leq k$, $I_i \subset R$ *intervalle ouvert contenant* r_i *et* $f_i : B \to R$ C^0 *telle que* $A \cap (B \times I_i) = \Gamma(f_i)$.

— *Soient* $f : B \to R$ *telle que* $\Gamma(f) \subset A$ *et* $1 \leq i \leq k$. *Montrons que* $\{p \in B, f(p) = f_i(p)\}$ *est ouvert. Soit* $p \in B$ *tel que* $f(p) = f_i(p)$. *Alors* $(p, f(p)) \in \Gamma(f_i) = A \cap (B \times I_i)$. *Or* I_i *est ouvert, donc on a* $U \subset B$ *ouvert contenant* p *tel que* $\forall x \in U, f(x) \in I_i$. *Alors, pour* $x \in U, (x, f(x)) \in A \cap (B \times I_j) \subset \Gamma(f_i)$, *soit* $f_{|U} = f_{i|U}$. *Donc* $\{x \in B, f_i(x) < f_j(x)\}, \{x \in B, f_i(x) = f_j(x)\}$ *et* $\{x \in B, f_i(x) > f_j(x)\}$ *sont trois ouverts disjoints qui recouvrent* B. *Or* B *est définissablement connexe, donc* $f < f_i$ *ou* $f = f_i$ *ou* $f_i < f$.

— *De ce qui précède, on déduit immédiatement* $f_1 < \ldots < f_k$

— *Soit* $(p, y) \in A \cap (B \times R)$. *Soient* $I \subset R$ *intervalle ouvert contenant* y *et* $f : B \to R$ C^0 *telle que* $A \cap (B \times I) = \Gamma(f)$. *On a* $f(x) \in A_x$, *d'où* $1 \leq i \leq k$ *tel que* $f = f_i$. *Donc* $A \cap (B \times R) = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma(f_i)$.

— *Soit* $x \in R^{n+1}$. *On dit que* x *est* A*-bon s'il existe une boîte ouverte* A*-bonne contenant* x. *Soit* A_b *l'ensemble des points* A*-bons.*

— *Soit* $X \subset A_b$ *définissablement connexe. Alors il existe* $f_1 < \ldots < f_k : X \to R$ C^0 *telles que* $A \cap (X \times R) = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma(f_i)$.

On peut supposer $X \neq \varnothing$. *D'après ce qui précède,* $x \mapsto |A_x|$ *est localement constante sur* X. *Or* X *est définissablement connexe, donc* $x \mapsto |A_x|$ *est constante. Soit* $k = |A_x|$, *pour* $x \in X$. *Soient, pour* $x \in X$, $B_x \subset R^n$ *boîte ouverte contenant* x *et* $f_{x,1} < \ldots < f_{x,k} : B_x \to R$ C^0 *telles que* $A \cap (B_x \times R) = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma(f_{x,i})$. *Pour* $x, y \in X$ *et* $1 \leq i \leq k$, *on a* ${f_{x,i}}_{|B_x \cap B_y} = {f_{x,j}}_{|B_x \cap B_y}$. *Donc*

$f_i : x \mapsto f_{x,i}(x)$ *est* C^0. *En outre,* $A \cap (X \times R) = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma(f_i)$.

- *Soit* $U \subset R^{n+1}$ *ouvert. Alors* $U \cap A_b \neq \varnothing$.
  - *Quitte à réduire* U, *on peut supposer* $U = B \times]a,b[$ *avec* $B \subset R^n$ *boîte ouverte et* $a < b \in R$.
  - *Pour* $p \in B$, *soit* $A(p) = \{(r,s) \in]a,b[\times R, (p,r,s) \in A\}$. *Pour* $p \in B$ *et* $r \in]a,b[$, $A(p)_r = A_{(p,r)}$ *est fini. Dans la preuve de* (III_1) *pour* $A(p)$, $\{r \in]a,b[, r$ *n'est pas* $A(p)$*-bon*$\}$ *est fini. Donc* $Bad(A) = \{(p,r) \in U, r$ *n'est pas* $A(p)$*-bon*$\}$ *est d'intérieur vide. Quitte à considérer (par* (I_{n+1})*) une décomposition cellulaire de* R^{n+1} *qui partitionne* U *et* $Bad(A)$ *et réduire une cellule ouverte contenue dans* U *à une boîte ouverte, OPS* $Bad(A) = \varnothing$. *D'après le point précédent, pour* $p \in B$, $r \mapsto |A_{p,r}|$ *est constante sur* $]a,b[$, *disons de valeur* $k(p)$.
  - *Montrons que* k *est bornée. Pour* $r \in]a,b[$, *soit* $A^r = \{(p,s), p \in B, (p,r,s) \in A\}$. *Pour* $r \in]a,b[$ *et* $p \in B$, $A^r_p = A_{(p,r)}$ *est fini, donc par* (III_n), *on a* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall p \in B, |A^r_p| \leq N$. *Donc* $k \leq N$.
  - *Soit, pour* $0 \leq i \leq \max k$, $U_i = \{x \in U, |A_x| = i\}$ *et* $f_{i,1} < \ldots < f_{i,i} : U_i \to R$ *telles que* $\forall x \in U_i, A_x = \{f_{i,j}(x), 1 \leq j \leq i\}$. *Par* (II_{n+1}) *puis* (I_{n+1}), *on a* $\mathcal{D}$ *une décomposition cellulaire de* R^{n+1} *qui partitionne les* $U_i, 0 \leq i \leq \max k$ *telle que* $\forall 0 \leq i \leq \max k, \forall C \in \mathcal{D}, C \subset U_i \Rightarrow \forall 1 \leq j \leq i, f_{i,j}$ *est* C^0 *sur* C. U *est ouvert donc on a* $C \in \mathcal{D}$ *ouverte telle que* $C \subset U$. *Or* $U = \bigcup_{i=0}^{\max k} U_i$ *et* $\mathcal{D}$ *partitionne les* $U_i, 0 \leq i \leq \max k$, *donc on a* $0 \leq i \leq \max k$ *tel que* $C \subset U_i$. *Les* $f_{i,j}, 1 \leq j \leq i$ *sont* C^0 *sur* C, *donc tout point de* C *est* A*-bon.*
- *Par* (I_{n+1}), *on a une décomposition cellulaire* $\mathcal{D}$ *qui partitionne* A_b. *Soit* $C \in \mathcal{D}$.
  - *Si* C *est ouvert, alors* $C \cap A_b \neq \varnothing$, *d'où* $C \subset A_b$. *Donc on a* $N_C \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall x \in C, |A_x| \leq N_C$.
  - *Sinon, soit* p_C *l'homéomorphisme de* C *vers une cellule ouverte de* $\mathbb{R}^k$ *(où* $k = dim(C)$*). Alors, pour* $x \in C, |A_x| = |(p_C \times id_R)(A)_{p_C(x)}|$, *donc par* (III_k), *on a* $N_C \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall x \in C, |A_x| \leq N_C$.

  Soit $N = \max_{C \in \mathcal{D}} N_C$. *Alors* $\forall x \in R^{n+1}, |A_x| \leq N$.

Références

[Dri98] L. P. D. van den Dries. *Tame Topology and O-minimal Structures*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1998.