$(R, <, \dots)$ O-minimale.

<u>Déf</u> On définit par induction sur n la notion de cellule de R^n et d'une suite associée de 0 et de 1, $(i_1, \dots, i_n)$

- Si $n = 1$, $X \subset R$ est une cellule si
  $X = \{a\}$; on pose $i_1 = 0$
  $X = (a, b)$ où $a, b \in R \cup \{\pm\infty\}$; $i_1 = 1$.
- $X \subset R^{n+1}$ est une cellule si $\pi(X) \subset R^n$ est une cellule (π la projection sur les n premières coordonnées) et l'une des conditions suivantes est satisfaite :
  (a) Il existe une fonction continue définissable $f : \pi(X) \to R$ et $X = \text{graph}(f)$. Alors $i_{n+1} = 0$
  (b) Il existe deux fonctions continues définissables $f, g : \pi(X) \to R \cup \{\pm\infty\}$ telles que $\forall x \in \pi(X)$, $f(x) < g(x)$. On permet à f d'être constante avec valeur $-\infty$, et à g d'être constante avec valeur $+\infty$. Sinon leurs valeurs sont dans R
  $X = \{(x, y) \in R^{n+1} \mid x \in \pi(X),\ f(x) < y < g(x)\}$, et $i_{n+1} = 1$
  Si $(i_1 \dots i_n)$ est la suite associée à $\pi(X)$, alors $(i_1, \dots, i_n, i_{n+1})$ est celle associée à X.

Pour $n = 0$, R^0 est une cellule.

Si X est une cellule de R^n avec suite associée $i_1, \dots, i_n$, on pose $\dim(X) = \sum_{j=1}^{n} i_j$

Remarques / <u>Exercice</u>.

(1) Soit $X \subset R^n$ une cellule avec suite associée $i_1, \dots, i_n$, et soient $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$ les indices j tels que $i_j = 1$. (Donc $\dim X = k$). On considère la projection $p : R^n \to R^k$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_k})$
Alors p définit un homéomorphisme entre X et son image, qui est une cellule ouverte dans R^k.

(0) Une cellule $X \subseteq R^n$ est ouverte si et seulement si $\dim(X) = n$.

(2) Si $X \subseteq R^n$ est une cellule, et p est la projection sur les k premières coordonnées $(k < n)$, alors $p(X)$ est une cellule de R^k.

<u>Déf</u> Un ensemble $X \subset R^n$ est définissablement connexe si X est définissable, et il n'existe pas d'ouverts définissables U_1, U_2 de R^n tels que $U_1 \cup U_2 \supseteq X$, $U_i \cap X \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 \cap X = \emptyset$.

<u>Proposition/Exercice</u> Une cellule $X \subset R^n$ est définissablement connexe.

<u>Dém</u> Clair pour $n = 1$. Utiliser une induction sur n.

<u>Remarques</u> (1) L'union d'un nombre fini de cellules de R^n non ouvertes a intérieur vide. (induction sur n). Exercice

(2) Une cellule X est ouverte dans $cl(X)$.

Dém (2) Par induction sur n si $X \subseteq R^n$. Pour $n = 1$ c'est clair.

Soit $X \subseteq R^n$, $Y = \pi(X)$ sa projection dans R^{n-1}. Par induction $cl(Y) \setminus Y$ est fermé. Si $X = \text{graphe}(f)$, alors $cl(X) \setminus X \subseteq (cl(Y) \setminus Y) \times R$ qui est fermé et disjoint de X.

Si $X = (f, g)$ (i.e. $X = \{(x,y) \mid x \in Y,\ f(x) < y < g(x)\}$) alors $cl(X) \subseteq X \cup \underset{\text{si } f(x) \in R}{\text{graph}(f)} \cup \underset{\text{si } g(x) \in R}{\text{graph}(g)} \cup (cl(Y) \setminus Y) \times R. = Z$

En effet, tout point de $cl(Y) \times R$ qui n'est pas dans Z est contenu dans un ens. de la forme $U \times I$, avec I intervalle ouvert, $U \subset Y$ ouvert dans $cl(Y)$ (Hypothèse d'induction, et continuité de f et g).

Déf Une <u>décomposition</u> de R^m est une partition de R^m en un nombre fini de cellules $C_1, \dots, C_k$ satisfaisant, si $m > 1$, que $\{\pi(C_i) \mid i = 1, \dots, k\}$ forment une décomposition de R^{m-1}. (π = proj. sur les $m-1$ premières coord.).

Décomposition typique : On prend une décomposition $A_1, \dots, A_k$ de R^m. Pour chaque i on a des fonctions définissables sur A_i, à valeurs dans R, satisfaisant $f_{i1} < f_{i2} < \dots < f_{im(i)}$,

On définit $\mathcal{D}_i = \{(-\infty, f_{i1}), (f_{i1}, f_{i2}) \dots (f_{i,m(i)}, +\infty),$
$\Gamma(f_{i1}), \dots, \Gamma(f_{im(i)})\}$

et $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{D}_i$. ($\mathcal{D}_i = A_i \times R$ est permis)

Notation : $(f, g) = \{(x, y) \mid x \in \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g),$
$f(x) < y < g(x)\}$

$\Gamma(f) = \mathrm{graph}(f)$.

Déf On dit qu'une décomposition $\mathcal{D}$ de R^m partitionne un ens. définissable $S \subset R^m$ si toute cellule de $\mathcal{D}$ est ou bien contenue dans S, ou bien disjointe

Théorème de décomposition cellulaire $\boxed{30}$

(I_m) Si $A_1, \dots, A_k \subseteq R^m$ sont définissables, il existe une décomposition $\mathcal{D}$ de R^m qui partitionne chaque A_i

(II_m) Si $f : A \to R$ est une fonction définissable, $A \subseteq R^m$ alors il existe une décomposition $\mathcal{D}$ de R^m qui partitionne A et est telle que si $B \in \mathcal{D}$ et $B \subseteq A$ alors $f|_B$ est continue.

(UF_m) Si $A \subseteq R^m$ est définissable, et tel que $\forall x \in R^{m-1}$, A_x est finie, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in R^{m-1}$ $|A_x| \leq k$.

La preuve est longue, et est faite par induction sur m. On suppose les 3 assertions sont vraies pour $n < m$. On montre d'abord UF_m, puis I_m puis II_m.

Je ne vais pas faire la preuve.

On remarque que nous connaissons déjà les cas $m = 1$ et UF_2.

Nous allons maintenant étudier les conséquences du théorème

Remarques faciles

- Un singleton est définissablement connexe.
- les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont définissablement connexes
- Si S est définissablement connexe et $f : S \to \mathbb{R}^n$ est définissable continue, alors $f(S)$ est définissablement connexe
- Si X et Y sont définissablement connexes, $\subseteq \mathbb{R}^n$, et $X \cap Y \neq \phi$ alors $X \cup Y$ est définissablement connexe.

Proposition 31 Si $X \subseteq \mathbb{R}^m$ est définissable non vide, alors X n'a qu'un nombre fini de composantes définissablement connexes. Elles sont ouvertes et fermées et donnent une partition de X.

Déf Si $S \subset \mathbb{R}^m$ est définissable alors une composante définissablement connexe de S est un ensemble définissable $X \subset S$ qui est définissablement connexe et maximal pour ces deux propriétés

Dém On prend une décomposition $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^m$ qui partitionne X, et soient $C_1, \dots, C_k$ les cellules de $\mathcal{D}$ contenues dans X.

Pour chaque $\phi \neq I \subset \{1, \dots, k\}$ on définit $C_I = \bigcup_{i \in I} C_i$

Soit $I \subset \{1,\dots,k\}$ maximal tel que $C_I = C'$ soit définissablement connexe. Nous allons montrer que c'est une composante déf$^+$ connexe. Soit $Y \subseteq X$ définissablement connexe.

Assertion : si $Y \cap C' \neq \emptyset$ alors $Y \subseteq C'$.

Soit $C_Y = \bigcup \{ C_i \mid C_i \cap Y \neq \emptyset \}$.

Alors $Y \subseteq C_Y$, et C_Y est déf$^+$ connexe. Mais $Y \cap C' \neq \emptyset$ implique $C' \cap C_Y \neq \emptyset$ et donc $C_Y \subseteq C'$ par maximalité de I.

On voit facilement que si $Y \subseteq X$ est déf$^+$ connexe, alors $cl(Y) \cap X$ l'est aussi. Donc toute composante définissablement connexe de X est fermée pour la topologie induite. Deux composantes distinctes sont disjointes, et tte cellule de $\mathcal{D}$ est contenue contenue dans X dans une composante déf$^+$ connexe.

Cela termine la preuve.

<u>Lemme</u> 32 Si $A \subseteq \mathbb{R}^m$ est une cellule ouverte, et $f : A \to \mathbb{R}^m$ est une application définissable injective, alors $f(A)$ contient une cellule ouverte.

<u>Dém</u> Il faut remarquer deux choses :

(1) Une cellule $A \subseteq \mathbb{R}^m$ est ouverte ssi sa dimension est m.
Si $\dim(A) < m$ alors $\mathrm{int}(A) = \emptyset$: A ne contient pas de boîte ouverte.

(2) Une union finie de cellules de $\mathbb{R}^m$ de dimension $< m$ est d'intérieur vide (Induction sur m)

Le cas $m = 1$ est clair : $f(A)$ est infini, donc contient un intervalle ouvert. On suppose le résultat vrai pour $n < m$.

Soit $\mathcal{D}$ une décomposition de $\mathbb{R}^m$ qui partitionne $f(A)$. Ecrivons $f(A) = C_1 \cup \dots \cup C_k$.

On peut raffiner $\mathcal{D}$ et suppose que f est continue sur chaque $f^{-1}(C_i)$.

Prenant une décomposition de R^m qui partitionne les $f^{-1}(C_i)$, et utilisant le fait qu'une union finie de cellules d'intérieur vide a intérieur vide, il existe une boîte ouverte B qui est contenue dans un $f^{-1}(C_i)$, et nous fixons i. Nous allons montrer que $\dim(C_i) = m$.

Sinon : $\dim(C_i) < m$; nous savons que C_i est homeomorphe avec une cellule ouverte de $R^{\dim(C_i)}$ et $R^{\dim(C_i)}$ se plonge continument dans R^{m-1}, nous obtenons une injection définissable g continue

$$\begin{array}{l} B \xrightarrow{f} f(B) \subset C_i \xrightarrow{p} R^{\dim(C_i)} \longrightarrow R^{m-1} \\ \cap \\ R^m \end{array}$$

Nous allons montrer que c'est impossible. En permutant des variables, nous pouvons supposer que l'application $C_i \to R^{m-1}$ est obtenue en projetant sur les $m-1$ premières coordonnées. Ecrivons $B = B' \times (a,b)$, soit $c \in (a,b)$, on définit $h : B' \longrightarrow R^{m-1}$ par $h(x) = g(x,c)$, où g est la composée de toutes les fonctions, $B \to R^{m-1}$.

Par hypothèse d'induction, $h(B')$ contient une boîte ouverte D. Comme g est continue, $g^{-1}(D)$ est ouvert dans B mais $g^{-1}(D) \subset B' \times \{c\}$, qui est d'intérieur vide.

Nous avons plus ou moins vu que la dimension d'une cellule C est le plus grand r tel qu'une projection p sur des coordonnées envoie C sur une cellule ouverte de R^r.

Déf Soit $X \subset R^n$. La dimension de X, $\dim(X)$, est la dimension maximale d'une cellule C contenue dans X. On pose $\dim(\emptyset) = -\infty$.

Proposition 33

(1) Si $X \subseteq Y \subseteq R^m$ sont définissable alors $\dim(X) \leqslant \dim(Y)$

(2) Si $X \subseteq R^m$ et $Y \subseteq R^n$ sont définissables, et $f : X \to Y$ est une bijection définissable, alors $\dim X = \dim Y$.

(3) Si $X, Y \subseteq R^m$ sont définissables alors

$$\dim X \cup Y = \max\{\dim X, \dim Y\}.$$

Dém (1) est clair.

Pour (2) On peut supposer que X est une cellule de R^m, puis que c'est une cellule ouverte de $R^{\dim X}$, et que f continue sur X. Le lemme 32 nous dit alors que $\dim(Y) \geq m$; sinon nous aurions une application injective définissable de X dans une union finie d'ensembles de $\dim < m$. Nous avons vu que c'est impossible. L'argument symétrique donne $\dim(X) \geq \dim(Y)$.

(3) Soit $A \subset X \cup Y$ une cellule de dimension maximale d, $p : R^m \to R^d$ une projection telle que p définisse un homéomorphisme entre A et la cellule ouverte $p(A)$ de R^d.

Alors $p(A) = p(A \cap X \cup A \cap Y) = p(A \cap X) \cup p(A \cap Y)$.

Comme $p(A)$ est ouverte, prenant une décomposition de R^d partitionnant $p(A \cap X)$ et $p(A \cap Y)$, l'un des deux doit contenir une cellule ouverte

Familles d'ensembles définissables

Soit $S \subseteq R^{m+n}$ définissable.
Si $a \in R^m \rightsquigarrow S_a = \{ b \mid (a,b) \in S \} \subset R^n$.
famille définissable de sous ensembles de R^n,
S_a, $a \in R^m$

<u>Proposition</u> 34 Soit π la projection $R^{m+n} \to R^m$ sur les m premières coordonnées.

(1) Si $C \subseteq R^{m+n}$ est une cellule, et $a \in \pi(C)$, alors C_a est une cellule de R^n.

(2) Si $\mathcal{D}$ est une decomposition de R^{m+n} et $a \in R^m$, alors $\mathcal{D}_a = \{ C_a \mid C \in \mathcal{D}, a \in \pi(C) \}$ est une décomposition de R^n.

<u>Dém</u> (1) Induction sur n. On fixe a. Si $n = 1$, c'est clair, puisque C_a est un point ou un intervalle.
Soit C une cellule de R^{m+n+1}, $\pi_1 : R^{m+n+1} \to R^{m+n}$ et $\pi_2 : R^{m+n} \to R^m$ les projections sur les $(m+n)$ premières et m premières coordonnées respectivement.
Soit $D = \pi_1(C) \subseteq R^{m+n}$, une cellule.
Si $C = \Gamma(f)$, $f : D \to R$ continue, alors
$C_a = \Gamma(f_a)$, où $f_a : D_a \to R$ est définie par $f_a(x) = f(a, x)$
Par HI, D_a est une cellule, so OK.
Si $C = (f, g)_D$, alors $C_a = (f_a, g_a)_{D_a}$ est aussi une cellule.

(2) Clair.

$\boxed{\text{Corollaire 35}}$ Soit $S \subseteq R^{m+n}$ définissable. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall a \in R^m$, $S_a \subseteq R^n$ est partitionné par une décomposition de R^m ayant $\leq N$ cellules.
En particulier, chaque S_a a au plus $\leq N$ composantes définissablement connexes.

Dém On prend une décomposition $\mathcal{D}$ de R^{m+n} qui partitionne S. Alors $\mathcal{D}_a$ est une décomposition de R^n qui partitionne S_a et $|\mathcal{D}_a| \leq |\mathcal{D}|$.

Cor $S \subset R^{m+n}$ def. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tq $\forall a \in R^m$, S_a a au plus M points isolés

$\boxed{\text{Cor 36}}$ Si R est o-minimale et $R' \equiv R$ alors R' est o-minimale

satisfont les mêmes énoncés

En effet tout sous-ensemble définissable de R' est de la forme $\{ b \in R' \mid \varphi(\bar{a}, b) \text{ est vraie} \}$ avec φ une formule sans paramètres, et $\bar{a}$ dans R'^m
Grâce au corollaire on peut dire ; pour un entier N :
$\forall \bar{x}$ l'ensemble des y satisfaisant $\varphi(\bar{x}, y)$ est une union d'au plus N (intervalles ouverts ou points)
Cet énoncé est vrai dans R pour un certain N, donc aussi dans R'

Proposition 37 Soit $S \subseteq R^{m+n}$ définissable. Pour $d \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, n\}$ l'ensemble $S(d) = \{ a \in R^m \mid \dim S_a = d \}$ est définissable. De plus
$$\dim\left(\left(S(d) \times R^n\right) \cap S\right) = \dim S(d) + d.$$

Dém Soit $\mathcal{D}$ une décomposition de $\mathbb{R}^{m+n}$ qui partitionne S. $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ la projection, $C \in \mathcal{D}$, $\pi(C)$
Si C est une $(i_1, \ldots, i_{m+n})$-cellule, alors $\pi(C)$ est une $(i_1, \ldots, i_m)$-cellule, et pour $a \in \pi(C)$, C_a est une $(i_{m+1}, \ldots, i_{m+n})$-cellule.

Donc $\dim C = \dim \pi C + \dim C_a \quad \forall a \in \pi C$.

Soit A une cellule de $\pi\mathcal{D}$, et $C_1, \ldots, C_k$ les cellules de $\mathcal{D}$ telles que $\pi(C_i) = A$, et $C_i \subseteq S$, alors $\forall a \in A$,
$S_a = (C_1)_a \cup \cdots \cup (C_k)_a$, $\dim S_a = \sup \dim (C_i)_a$
$= \sup \dim (C_i) - \dim(A)$.

Donc si $\dim S_a = d$, alors $A \subseteq S(d)$.
Cela montre que chaque $S(d)$ est une union de cellules.

On a aussi : $d = \sup\limits_{i=1,\ldots,k} (\dim C_i) - \dim A$

$$= \dim\left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right) - \dim(A)$$
$$= \dim(\pi^{-1}(A) \cap S) - \dim(A)$$
$$= \dim((A \times \mathbb{R}^n) \cap S) - \dim(A).$$

D'où $\dim((S(d) \times \mathbb{R}^n) \cap S) = \dim S(d) + d$.

Cor 38 (1) $\dim S = \max\limits_{0 \leq d \leq n} \dim S(d) + d \qquad S \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ déf

(2) Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$, et $f : X \to \mathbb{R}^m$ sont définissables.
Alors $\forall d \in \{0, \ldots, n\}$ l'ensemble $S_f(d) = \{a \in \mathbb{R}^m \mid \dim f^{-1}(a) = d\}$ est définissable, et $\dim f^{-1}(S_f(d)) = d + \dim S_f(d)$

(3) A, B déf alors $\dim(A \times B) = \dim(A) + \dim(B)$.

En fait je crois que ce n'est pas si dur que ça.

On va montrer

$$\dim(\mathrm{cl}(A) \setminus A) < \dim(A).$$

Le résultat est vrai dans toute structure O-minimale. Mais la preuve est longue (*). Nous allons faire une hypothèse supplémentaire : qu'il y a une structure de groupe ordonné sur R. Alors R O-minimale implique que R est commutatif divisible.

Hypothèses $(R, +, -, 0, 1, <, \ldots)$ structure O-minimale dans laquelle + definit une loi de groupe, avec inverse −, et zéro 0. On fixe $1 > 0$.

Pour $x \in R$ on définit $|x| = \sup\{x, -x\}$

Soit $X \subseteq R$ définissable. Nous allons montrer comment choisir dans X un élément qui ne dépend pas de la définition de X, mais uniquement de l'ensemble X.

Si X a un plus petit élément on prend ce plus petit élément. Sinon cela veut dire que X contient un intervalle ouvert I tel que $\forall x \in X$, ou bien $x \in I$, ou bien $x > I$. On prend un tel I qui est maximal, et on l'écrit $I = (a,b)$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Les él^{ts} a, b sont uniquement définis à partir de X

Il y a 4 cas à considérer,

Cas 1 $\quad a, b \in \mathbb{R}$.

$$c = \frac{a+b}{2} \in I$$

Cas 2 $\quad a = -\infty,\ b \in \mathbb{R}$ $\qquad c = b - 1$

Cas 3 $\quad a \in \mathbb{R},\ b = +\infty$ $\qquad c = a + 1$

Cas 4 $\quad a = -\infty,\ b = +\infty$ $\qquad c = 0$.

Choix définissable 39 $(\mathbb{R}, +, -, 0, 1, < \dots)$

(1) Si $S \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ est définissable non vide, $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$.
Alors il existe une application définissable $f : \pi(S) \to \mathbb{R}^n$ telle que $\Gamma(f) \subseteq S$
$\hookrightarrow$ graphe de f.

(2) Si $X \subset \mathbb{R}^n$ est définissable et $E \subseteq X^2$ est une relation d'équivalence définissable, alors il existe un ensemble Y définissable qui représente les classes d'équivalence de E.

Dém (1) Quand $n = 1$, nous avons vu comment définir f : soit le plus petit élément de la fibre, soit un point dans l'intervalle "le plus à gauche". On suppose le résultat vrai pour n, soit $S \subseteq \mathbb{R}^{m+n+1}$ définissable
On considère les deux projections :

$\pi_1 : R^{m+n+1} \longrightarrow R^{m+n}$ sur les $m+n$ premières coordonnées

$\pi_2 : R^{m+n} \longrightarrow R^m$ sur les m premières coordonnées.

Par le cas $n=1$, nous avons une fonction definissable $f_1 : \pi_1(S) \to R$ telle que $\Gamma(f_1) \subseteq S$.

Par HI, nous avons une fonction définissable $f_2 : \pi_2\pi_1(S) \to R^n$ telle que $\Gamma(f_2) \subseteq \pi_1(S)$. On définit alors

$$f : \pi(S) \to R^{n+1} \quad \text{par} \quad f(x) = (f_2(x), f_1(x, f_2(x)))$$

(2) On regarde $E \subseteq X^2$, ~~et $\pi : X^2$~~ $\longrightarrow X$.

Dans (1), on montre, par induction sur n, que la fonction f dépend seulement de la fibre, et pas de sa définition. Donc, si $e : X \to X$ est une fonction de choix, et si $E(a,b)$, alors $e(a) = e(b)$, puisque E_a = la classe d'équivalence de a.

Application Le (2) s'appelle aussi "élimination des imaginaires". Parmi les relations d'équivalence auxquelles elle s'applique on a bien sur la relation $S_a = S_b$ pour $a, b \in \pi(S)$.

Thm 40 (Selection de courbe) Soit $S \subseteq R^n$ définissable, soit $b \in cl(S)$. Il existe une application continue définissable $\gamma : [0, r) \to S$ (pour un $r > 0$) telle que $\gamma(0, r) \subseteq S$, et $\gamma(0) = b$.

Dém Si $b \in S$, on prend γ constante égale à b. Supposons $b \notin S$. On regarde

$$X = \{(t, x) \in R \times R^n \mid x \in S, \ \sup\{|x_i - b_i|\} = t\}$$

où $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $x = (x_1 \ldots x_n)$.

Soit $p : R^{1+n} \to R$ la projection sur la 1ère coordonnée. Comme $b \in cl(S)$, $b \notin S$ on a $p(X) = R^{>0}$. Par choix définissable, il existe une application définissable $\gamma : R \to R^n$ telle que $\Gamma(\gamma) \subseteq X$.