Notes du cours sur l'o-minimalité

1 La structure $\mathbb{R}_{an}$

Nous allons montrer, avec quelques boites noires, que $\mathbb{R}_{an}$ est o-minimale. Rappel:

$$\mathbb{R}_{an} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <, \tilde{f})_{m \in \mathbb{N}, f \in \mathbb{R}\{X_1,\dots,X_m\}}$$

where $\mathbb{R}\{X_1, \dots, X_m\}$ est l'anneau de éries formelles en $X_1, \dots, X_m$ qui convergent sur un voisinage de $[-1, 1]^m =: I^m$, et

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I^m \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a aussi $\mathcal{L}_{an} = \{+, -, \cdot, 0, 1, <, \tilde{f}\}_{m \in \mathbb{N}, f \in \mathbb{R}\{X_1,\dots,X_m\}}$

Définition 1.1. (i) $X \subseteq \mathbb{R}^m$ est *semi-analytique en* $x \in \mathbb{R}^m$ si x a un voisinage ouvert U tel que $U \cap X$ est une union finie d'ensembles de la forme

$$\{y \in U \mid f(y) = 0, g_1(y) > 0, \dots, g_k(y) > 0\}$$

où f et les g_i sont analytiques.

(ii) $X \subseteq \mathbb{R}^m$ est *semi-analytique* s'il est semi-analytique en chaque point de $\mathbb{R}^m$. Il suffit de le vérifier pour les $x \in \mathrm{cl}(X)$.

(iii) $X \subseteq \mathbb{R}^m$ est *sous-analytique en* $x \in \mathbb{R}^m$ si x a un voisinage ouvert U, et il existe un semi-analytique **borné** $S \subset \mathbb{R}^{m+n}$ tel que $U \cap X = \pi(S)$, où $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ est la projection sur les m premières coordonnées.

(iv) $X \subseteq \mathbb{R}^m$ est *sous-analytique* s'il est sous-analytique en chaque point de $\mathbb{R}^m$.

Les sous-analytiques de $\mathbb{R}^m$ forment une algèbre de Boole, contenue dans la classe des sous-analytiques, qui est close par intersections et unions finies.

1.2. Propriétés importantes

(1) Les sous-analytiques de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$ sont exactement les semi-analytiques. Ce n'est pas vrai pour $m > 2$.

(2) Un semi-analytique **borné** n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, et chaque composante connexe est semi-analytique (j'avais oublié de dire cela en cours).
(3) Les sous-analytiques **bornés** de $\mathbb{R}^m$ sont exactement les $\pi(S)$, où S est un semi-analytique borné de $\mathbb{R}^{m+n}$. Un sous-analytique borné n'a donc qu'un nombre fini de composantes connexes, et elles sont sous-analytiques.
(4) Si $X \subset \mathbb{R}^m$ est sous-analytique, alors $\mathbb{R}^m \setminus X$ l'est aussi.
(5) (Je ne l'ai pas fait) La clôture d'un semi-analytique est semi-analytique. Et donc la clôture d'un sous-analytique est un sous-analytique.

(1), (2) et (5) sont prouvés par Lojasiewicz (1965, Notes IHES), (3) est facile, et (4) est dû à Gabrielov (1968). C'est (4) qui fera tout marcher (et (3)).

Définition 1.3. $X \subseteq \mathbb{R}^m$ est *finiment sous-analytique* si son image par l'application

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto \Big(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}}, \ldots, \frac{x_m}{\sqrt{1+x_m^2}}\Big)$$

est un sous-analytique.

On remarque que l'application ci-dessus définit une bijection avec $(-1,1)^m$, et elle est analytique. Elle envoie $[-1,1]^m$ sur $[-1/2,1/2]^m$. Un ensemble finiment sous-analytique n'aura donc qu'un nombre fini de composantes connexes, et elles seront finiment sous-analytiques. On définit maintenant $\mathbb{R}_{FS} = (\mathbb{R}, X)_{m\in\mathbb{N}, X\subseteq\mathbb{R}^m \text{finiment sous-analytique}}$. On remarque que les graphes de l'addition, de la soustraction, de la multiplication sont finiment sous-analytiques (et même finiment semi-analytiques).

Théorème 1.4. *La structure $\mathbb{R}_{FS}$ est o-minimale.*

Démonstration. On a vu que $\mathbb{R}_{FS}$ contient les graphes des opérations d'anneau, et d'autre part, le résultat de Gabrielov (1.2(4) ci-dessus), nous donne que $\mathbb{R}_{RS}$ élimine les quantificateurs. En effet, si $X \subseteq \mathbb{R}^m$ est finiment sous-analytique, alors son complément l'est aussi. D'autre part il est clair que les finiment sous-analytiques sont clos par intersections et unions finies, et par projection. Par 1.2(3), les sous-ensembles définissables de $\mathbb{R}$ ont un nombre fini de composantes connexes, qui sont semi-analytiques, donc des intervalles ou des points.

1.5. Il suffit maintenant de montrer que $\mathbb{R}_{FS}$ et $\mathbb{R}_{an}$ sont bi-interpétables. C'est à dire que tout ensemble définissable de $\mathbb{R}_{an}$ est définissable dans $\mathbb{R}_{FS}$, et vice-versa. Les fonctions $\tilde{f}$ de $\mathcal{L}_{an}$ sont certainement définissables dans $\mathbb{R}_{FS}$, il faut montrer l'autre direction. Pour cela, il suffit de montrer que les semi-analytiques bornés sont définissables dans $\mathbb{R}_{an}$. On remarque la chose suivante:
Soit f une fonction analytique, définie sur un fermé borné, disons une boîte fermée B. Chaque point $a \in B$ a un voisinage ouvert (petite boite ouverte B_a) sur lequel le développement de Taylor de f en a, noté $T_a(f)$, converge et définit f. Par compacité, un nombre fini de ces boites B_a suffit, disons $B_1, \ldots, B_r$. Par o-minimalité, on peut supposer que $T_a(f)$ converge sur un voisinage de $\mathrm{cl}(B_i), i = 1, \ldots, r$. Et maintenant, on définit une bijection affine entre la boite

fermée $\mathrm{cl}(B_i)$ et I^m, ce qui donne le résultat.
Le fait qu'on puisse se restreindre à des fonctions dont le domaine est fermé borné, vient de 1.2(5). On en déduit que les sous-analytiques bornés sont bien définissables dans $\mathbb{R}_{an}$.
Notons qu'on n'en avait pas besoin de $\mathbb{R}_{FS}$ interprétable dans $\mathbb{R}_{an}$: un réduit d'une structure o-minimale est o-minimale, et $\mathbb{R}_{an}$ est définissable dans $\mathbb{R}_{FS}$.

Dans [3], les auteurs donnent une axiomatisation de $T_{an} = \mathrm{Th}(\mathbb{R}_{an})$. Elle permettra ensuite de décrire les fonctions définissables.

1.6. L'axiomatisation de T_{an}. On considère les clôtures universelles des formules suivantes
(**AC1**) Pour $f, g \in \mathbb{R}\{X_1, \dots, X_m\}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{f+g}(x) = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x),\ \widetilde{fg}(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

$$\textstyle\bigwedge_i |x_i| \leq 1 \to \tilde{0}(x) = 0 \wedge \tilde{1}(x) = 1,\ \bigvee_i |x_i| > 1 \to \tilde{0}(x) = \tilde{1}(x) = 0.$$

(**AC2**) $\bigwedge_i |x_i| \leq 1 \to \tilde{X}_i = x_i$, $\bigvee_i |x_i| > 1 \to \tilde{X}_i = 0$.
(**AC3**) Si $f \in \mathbb{R}\{X_1, \dots, X_n\}$, et $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$ sont tels que $g_i(0, 0, \dots, 0) = 0$ et $f(g_1 m \dots, g_n) \in \mathbb{R}\{X_1, \dots, X_m\}$ et $g(I_m) \subset I_n$ ($g = (g_1, \dots, g_n)$), alors

$$\bigwedge_i |x_i| \leq 1 \to \widetilde{f(g_1, \dots, g_n)}(x) = \tilde{f}(g_1(x), \dots, g_n(x)).$$

(**AC4**) Si $f, g \in \mathbb{R}\{X_1, \dots, X_m\}$, $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in I^m$ sont tels que $g = T_a(f)(\epsilon X_1, \dots, \epsilon X_m)$ ($T_a(f)$ est le développement de Taylor de f en a ; cela nous dit que $T_a(f)$ converge sur un voisinage de $[-\epsilon, \epsilon]^m$), alors

$$(\bigwedge_i |x_i| \leq 1 \wedge \bigwedge_i |\tilde{a}_i + \tilde{\epsilon} x_i| \leq 1) \to \tilde{f}(\tilde{a}_1 + \tilde{\epsilon} x_1, \dots, \tilde{a}_m + \tilde{\epsilon} x_m) = \tilde{g}(x).$$

$\tilde{\epsilon}$ et $\tilde{a}_i$ sont les fonctions valant ϵ ou a_i sur I^m, et 0 en dehors.

Théorème 1.7. *La théorie T_{an} est axiomatisée dans le langage $\mathcal{L}_{an} \cup \{^{-1}\}$ par:*
(1) Les axiomes pour les corps ordonnés (cela inclut l'axiome définissant l'inverse: $\forall x\, (x \neq 0 \to x^{-1}x = 1) \wedge (x = 0 \to x^{-1} = 0)$.
(2) Les schémas d'axiomes universels (AC1) – (AC4).
(3) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, un axiome disant que tout élément positif a une racine n-ième.

Remarque 1.8. (1) La structure $\mathbb{R}_{an}$ élimine les quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}_{an} \cup \{^{-1}\}$; la preuve est longue, j'en donnerai peut-être quelques ingrédients. Ainsi que quelques ingrédients de la preuve du thérème 1.7.
(2) Il suit maintenant que si $K \models T_{an}$, et L est une sous-structure de K (donc un sous-corps ordonné) dont les éléments positifs ont des racines n-ièmes, alors $L \models T_{an}$, et aussi $L \preceq K$.

1.9. Description des fonctions définissables. On considère maintenant le langage $\mathcal{L}'_{an} = \mathcal{L}_{an} \cup \{^{-1}, \sqrt[n]{\ }, n \geq 2\}$, et on obtient le résultat suivant:

Corollaire 1.10. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définissable dans $\mathbb{R}_{an}$, alors il existe des termes $t_1, \ldots, t_k$ du langage $\mathcal{L}'_{an}$ tels que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, il y a un i tel que $f(a) = t_i(a)$. C'est à dire, f est définie par morecaux par des $\mathcal{L}'_{an}$-termes.*

La démonstration suit du lemme suivant:

Lemme 1.11. *Soit T une théorie dans un langage $\mathcal{L}$, qui est universelle, complète et élimine les quantificateurs. Si K est un modèle, et f une fonction définissable dans K, alors f est définie par morceaux par des $\mathcal{L}(K)$-termes.*

Démonstration. Supposons que non, soit $\varphi(x)$ la $\mathcal{L}(K)$-formule définissant f et considérons l'ensemble suivant de formules (de $\mathcal{L}(K)$):

$$\Sigma(x) = \{\neg\varphi(x, t(x)) \mid t \text{ un terme de } \mathcal{L}(K)\}.$$

Alors cet ensemble de formules est finiment satisfaisable dans K, donc est réalisé dans une extension élémentaire M de K, par un uplet c. La sous-structure N de M engendrée par K et c est donc un modèle de T, et est une sous-structure élémentaire de M. Cependant, comme c réalise Σ, elle ne contient pas d'élément satisfaisant $\varphi(c, y)$, ce qui nous donne une contradiction.

1.12. L'axiomatisation de $T_{an,exp}$
On considère le langage $\mathcal{L}_{an,exp} = \mathcal{L}_{an} \cup \{\exp\}$, et la théorie $T_{an,exp}$ obtenue en ajoutant à T_{an} les clôtures universelles des axiomes suivants:
(**E1**) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$
(**E2**) $x < y \to \exp(x) < \exp(y)$
(**E3**) $x > 0 \to \exists y \ \exp(y) = x$
(**E4$_n$**) $x > n^2 \to \exp(x) > x^n$, pour $n \in \mathbb{N}^{>0}$.
(**E5**) $-1 \leq x \leq 1 \to \exp(x) = \widetilde{\exp}(x)$.
Si on agrandit le langage avec une fonction $\underline{\log}$, on rajoutera l'axiome suivant pour obtenir $T_{an,exp,log}$.
(**L**) $(x > 0 \to \exp(\underline{\log}(x)) = x) \wedge (x \leq 0 \to \underline{\log}(x) = 0$. L'axiome E3 devient inutile.

Théorème 1.13. (1) *$T_{an,exp,log}$ élimine les quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}_{an} \cup \{\exp, \underline{\log}\}$.*
(2) *La théorie $T_{an,exp}$ est complète.*

Et de la même façon que pour T_{an}, on obtient que

Corollaire 1.14. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définissable dans $\mathbb{R}_{an,exp,log}$, alors f est donnée par morceaux par des $\mathcal{L}_{an,exp,log}$-termes.*

On remarque que les fonctions $^{-1}$ et $\sqrt[n]{\ }$ sont (presque) des termes: $x > 0 \to x^{-1} = \exp(-\underline{\log}(x))$, et $x > 0 \to \sqrt[n]{x} = \exp(\frac{1}{n}\underline{\log}(x))$.

2 Corps valués

Une bonne référence est A.J. Engler, A. Prestel, *Valued fields*, chez Springer.

Définition 2.1. Un corps valué est un corps K muni d'une application v (la *valuation*) définie sur $K^\times$, prenant ses valeurs dans un groupe ordonné abélien $(\Gamma, +)$, et satisfaisant:

- $v(xy) = v(x) + v(y)$;

- $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

$v(0$ n'est donc pas définie, on étend souvent v à K en ajoutant un élément ∞ à Γ, et en posant $v(0) = \infty$, $\infty + \gamma = \infty$ et $\infty > \gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Si on est rigoureux, on écrit alors Γ_∞.

Remarque 2.2. La fonction v est donc un morphisme du groupe multiplicatif de K dans le groupe additif Γ. On a $v(1) = v(1 \cdot 1) = 0$, et $v(-1) = 0$, d'où $v(x) = v(-x)$. Notons que si $v(x) < v(y)$ alors $v(x + y) = v(x)$: cela suit de $x = (x + y) + (-y)$. Notons aussi que si $v(\sum_i a_i) = 0$, et si les a_i ne sont pas tous nuls, alors il existe $i \neq j$ tels que $v(a_i) = v(a_j)$.
Associés à (K, v) nous avons l'*anneau de valuation* de v et son *idéal maximal.* On vérifie facilement que $\mathcal{O}_v = \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$ est un anneau, que $\mathcal{M}_v = \{a \in K \mid v(a) > 0\}$ est un idéal de $\mathcal{O}_v$, et que tout élément de $\mathcal{O}_v^\times = \mathcal{O}_v \setminus \mathcal{M}_v$, ce qui entraine que $\mathcal{M}_v$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}_v$. Le quotient $k_v = \mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v$ est donc un corps, appelé le *corps résiduel* de la valuation. Je les note aussi $\mathcal{O}_K, \mathcal{M}_K$ et k_K, et $v(K^\times)$ est noté Γ_v ou bien Γ_K.

Corps valués

$K \quad v : K^\times \longrightarrow \Gamma$, Γ gpe abélien ordonné

$v(ab) = v(a) + v(b)$,
$v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$
on a égalité si $v(a) \neq v(b)$

$\mathcal{O}_v = \{ a \mid v(a) \geq 0 \}$, $\mathfrak{M}_v = \{ a \mid v(a) > 0 \}$, $k_v = \mathcal{O}_v / \mathfrak{M}_v$

1. Soit L un corps contenant K. Alors v s'étend en une valuation de L.

<u>Thm</u> Soit $R \subseteq L$ un sous-anneau, P un idéal premier de R.
Alors il existe un anneau de valuation $\mathcal{O} \subseteq L$, $\mathrm{Frac}\, \mathcal{O} = L$, tel que $R \subseteq \mathcal{O}$, $\mathfrak{M} \cap R = P$, $\mathfrak{M}$ = ideal maximal de $\mathcal{O}$.

Anneau de valuation $\mathcal{O}$ de L : $\forall a \in L$, $a \in \mathcal{O}$, ou $a \neq 0$ et $1/a \in \mathcal{O}$

$R_P = \{ a/b \mid a \in R, b \notin P \}$

2. Si L est une extension de Galois finie de K [$L = K(\alpha)$, si $P(X) \in K[X]$ est le polynôme minimal de α sur K alors $P'(\alpha) \neq 0$ et toutes les racines de P sont dans L] : si w_1 et w_2 sont des extensions de v à L alors il existe $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$ tel que $w_1 = w_2 \circ \sigma$

$$K(\alpha) \cong K[X]/(P)$$

3. $\mathcal{O}_v$ est intégralement clos dans K : si $a \in K$ satisfait $f(X) = 0$, avec $f(X) \in \mathcal{O}_v[X]$ unitaire, alors $a \in \mathcal{O}_v$. Soit $a \in K$ satisfait $a^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i a^i = 0$; on spse $a \notin \mathcal{O}$. Alors $a^{-1} \in \mathfrak{M}_v$, multiplie par a^{-n}, on obtient $-1 = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{c_i a^{i-n}}_{\in \mathfrak{M}_v}$

4. $(K, v) \subseteq (L, w)$ des corps valués. On a des inclusions naturelles

$k_K \hookrightarrow k_L$, $\Gamma_K \hookrightarrow \Gamma_L$

$\mathfrak{M}_v = \mathcal{O}_v \cap \mathfrak{M}_w \qquad \mathcal{O}_v^\times = \mathcal{O}_w^\times \cap K^\times$

Si $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{O}_L$ sont tels que $\mathrm{res}(a_1), \dots, \mathrm{res}(a_m) \in \mathcal{O}_L/\mathfrak{M}_L = k_L$ sont linéairement ind$^{\text{te}}$ modulo k_K, si $b_1, \dots, b_m \in L$ sont tels que modulo Γ_K, $v(b_1), \dots, v(b_m)$ sont linéairement independants. Soient $c_{ij} \in K$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Alors $v\left(\sum c_{ij} a_i b_j\right) = \min\{v(c_{ij}) + v(b_j)\}$

En particulier $\sum c_{ij} a_i b_j \neq 0$ sauf si les c_{ij} sont tous nuls.

Si $[L:K] < +\infty$, alors $[L:K] \geq [\Gamma_L : \Gamma_K] \cdot [k_L : k_K]$

↘ degré de l'extension

Si $\Gamma_K = \Gamma_L$, $k_K = k_L$, l'extension est <u>immédiate</u>

Examples : $(\mathbb{Q}, v_p) \subseteq (\mathbb{Q}_p, v_p)$ $\quad k = \mathbb{F}_p$

$(K(t), v_t) \subseteq (K((t)), v_t)$ $\quad k_v = K$, $\Gamma = \mathbb{Z}$

$v_t(p(t)) = n$ ssi $p(t) = t^n q(t)$ $\quad q(t) \neq 0$ $\quad p \in K[t]$

$k(t^\Gamma) \subseteq k((t^\Gamma))$ $\quad \sum a_\gamma t^\gamma$, $\{\gamma \mid a_\gamma \neq 0\}$ bien ordonné

indice de ramification

Si $[L:K] < \infty$, $\sum_{v/w} [k_w : k_v][\Gamma_w : \Gamma_v] \leq n$

valuation sur L étendant v

<u>Def</u> $\quad f_w e_w$

14/5/20.

<u>Def</u>. Un corps valué (K,v) est Hensélien si v a une unique extension à la clôture algébrique $\overline{K}$ de K.

K hensélien : $\quad$ Si $\alpha \in \overline{K}$ a comme poly. minimal $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $a_n = 1$,

$v(\alpha) = v(a_0)/n$ $\quad \sum a_i X^i = \prod (X - \alpha_j)$, $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines du polynôme

Par hypothèse, $v(\alpha) = v(\alpha_j)$ $\forall j$; $a_0 = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j$; $v(a_0) = \sum v(\alpha_j) = n v(\alpha)$

<u>Thm</u> (K,v) corps valué. Sont équivalents :

(1) (K,v) est Hensélien $\quad$ $\mathrm{res} : \mathcal{O}_v \longrightarrow k_v$

(2) Si $f(X) \in \mathcal{O}_v[X]$ est d'image $\mathrm{res}(f)$ non nulle dans $\mathcal{O}_v/_{\mathfrak{M}_v}[X] = k_v[X]$ et si $f(X)$ est irréductible, alors il existe $g(X) \in k_v[X]$ irréductible, et m tel que $\mathrm{res}(f) = g(X)^m$

(3) Soient $f, g, h \in \mathcal{O}_v[X]$, tels que $\text{res}(f) = \text{res}(g)\,\text{res}(h)$, et que $(\text{res}(g), \text{res}(h)) = 1$.
Alors il existe $g_1, h_1 \in \mathcal{O}_v[X]$ tels que $\text{res}(g_1) = \text{res}(g)$, $\text{res}(h_1) = \text{res}(h)$, $f = g_1 h_1$

(4) Soient $f \in \mathcal{O}_v[X]$, $a \in \mathcal{O}_v$ tels que $vf(a) > 0$, $vf'(a) = 0$. Alors il existe $b \in \mathcal{O}_v$ tel que $f(b) = 0$, $\underbrace{v(b-a)}_{= vf(a)} > 0$. (Ce b est unique)

[C'est le lemme de Hensel pour les corps valués complets, avec $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{R}$]

(5) Soient $f \in \mathcal{O}_v[X]$ et $a \in \mathcal{O}_v$ tels que $vf(a) > 2vf'(a)$. Alors il existe $b \in \mathcal{O}_v$ tel que $f(b) = 0$, $v(a-b) > vf'(a)$

(6) Si $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathcal{O}_v[X]$, tels que $a_{n-1} \notin \mathcal{M}_v$, $a_{n-2}, \dots, a_0 \in \mathcal{M}_v$.
Alors $f(X)$ a un zéro dans $\mathcal{O}_v$

(7) Si $f(X) = X^n + X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_0$, $a_{n-2}, \dots, a_0 \in \mathcal{M}_v$ alors f a une racine dans $\mathcal{O}_v$.

<u>Remarque</u> (1) entraine que si L est algébrique sur K hensélien, alors L est Hensélien

Rappel : $[L : K] = n$ alors $n \geq \sum_{w \supset v} [k_w : k_v][\Gamma_w : \Gamma_v]$

Si L/K est Galois : $n \geq \underbrace{e}_{[\Gamma_w:\Gamma_v]}\underbrace{f}_{[k_w:k_v]} g$ $\quad g$ = nombre d'extensions de v à L.
w fixé $\supset v$,

Quand a-t-on l'égalité ?
Si K est Henselien, quand a-t-on $n = ef$?

<u>Prop</u> (4.1.10 dans [EP]) Soit (K, v) un corps Hensélien, tel que
ou bien $\text{car}\, k_v = 0$
ou bien $\text{car}\, k_v = p > 0$ et il existe un nombre fini e d'éléments $\gamma \in \Gamma_K$, $0 \leq \gamma < v(p)$
($\rightarrow p \neq 0$ dans K, car $(K) = 0$)
Alors, si L est une extension algébrique propre de K, on a $\overset{w \supset v}{w(L^\times) \neq v(K^\times)}$, ou $k_w \neq k_v$.

K n'a pas d'extension algébrique immédiate propre
$n = ef$.

Non-exemple.

$K = \bigcup_{n>0} \mathbb{F}_p((t^{1/n}))$, avec $v(t)>0$. $\mathbb{F}_p((t))$ complet, gpe de valeur de $\mathbb{F}_p((t)) = \mathbb{Z}$

K est hensélien. $X^p - X = t^{-1}$ $\quad tX^p - tX = 1$

$a_1 = t^{-1/p}$ $\quad a_1^p - a_1 = -t^{-1/p}$ $\quad \sum_{i=1}^{\infty} t^{-1/p^i}$ $\quad \in \mathbb{F}_p((t^{\mathbb{Q}}))$

Suite de Cauchy : a_n, $v(a_{n+1} - a_n) \longrightarrow +\infty$

Engler - Prestel

Stichtenoth

[Logique :

- La théorie des corps alg^t clos valués élimine les quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}_{div} = \{+,-,\cdot,0,1,|\}$, $x/y \leftrightarrow x \neq 0$ et $y/x \in \mathcal{O}_v$ $\quad v(y) \geq v(x)$

$$v\,f(\bar{x}) \;\underset{>}{\geq}\; v(g(\bar{x})) \quad f,g \in K[\bar{x}]$$

$$f(\bar{x}) = 0$$

- Hensélien, car $k_v = 0$, ou bien $v(p)$ "fini".

$\mathbb{C}((t))$, $\mathbb{Q}_p$, $K((t^{\Gamma}))$ si $\mathrm{car}(K) = 0$

Ax-Kochen-Ershov : Soient K^v et L^w des corps valués satisfaisant ces conditions (Henséliens) (dans $\mathcal{L}_{div}$). Alors $K \equiv L$ ssi

(i) $k_v \equiv k_w$ dans le langage $\{+,-,\cdot,0,1\}$

(ii) $\Gamma_v \equiv \Gamma_w$ dans le langage $\{+,-,0,<\}$

Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non principal sur $\mathcal{P} = \{\text{premiers}\}$, et $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, alors

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{F}_p((t))/\mathcal{U} \;\cong\; \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Q}_p/\mathcal{U}$$

(K,v) valué ; fixe $w \supset v$, sur K^s ; $H = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(K^s/K) \mid w\circ\sigma = w\}$