3 La valuation standard

Soit R un corps ordonné. Si R est archimédien (i.e., $\mathbb{N}$ cofinal dans R, alors il ne possède pas de valuation compatible avec l'ordre, c'est-à-dire, satisfaisant $|a| \leq |b|$ implique $v(a) \geq v(b)$. Supposons R non archimédien; il contient donc des éléments qui sont en valeur absolue plus grands que tous les entiers. Je fixe un tel R.

La *valuation standard* sur R, (parfois appelée *valuation naturelle*) est définie en prenant comme anneau de valuation $\mathcal{O}_v$ l'enveloppe convexe de $\mathbb{Z}$, c'est-à dire, tous les éléments apparenant à un intervalle avec extrémités dans $\mathbb{Z}$. (On pourrait également dire, avec extrémités dans $\mathbb{Q}$). Remarquez que c'est bien un anneau: si $|a|, |b| \leq n$, alors $|a+b| \leq 2n$ et $|ab| \leq n^2$. De plus c'est un anneau de valuation: si $a \in R \setminus \mathcal{O}_v$, alors $|a| > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en particulier $|1/a| < 1$; notez que $|1/a| < 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^{>0}$, on appelle $1/a$ un *infinitésimal*. Les infinitésimaux forment un indéal maximal de $\mathcal{O}_v$, $\mathcal{M}_v$. On note parfois $\mathcal{O}_v$ R^{fin}, ou $\mathrm{Fin}(R)$, et $\mathcal{M}_v$ μ_R ou $\mu(R)$.

On définit $\Gamma = R^\times/\mathcal{O}_v^\times$, avec loi de groupe celle induite par l'application $R^\times \to \Gamma$, et ordre défini par $a\mathcal{O}_v < b\mathcal{O}_v$ si et seulement si $b/a \in \mathcal{M}_v$. Et $k_v = \mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v$. Presque par définition, k_v est archimédien, et donc se plonge, de façon unique, dans $\mathbb{R}$.
L'application res : $\mathcal{O}_v \to k_v \subseteq \mathbb{R}$ est aussi appelée l'application *partie standard*, notée st. Tout élément a de $\mathcal{O}_v$ satisfait alors $v(a-r) > 0$ pour un unique réel r. Autrement dit, a est infinitésimalement près d'un vrai réel.
On peut construire des corps R ne contenant pas $\mathbb{R}$, mais dont le corps résiduel est $\mathbb{R}$. Nous supposerons en général que R contient $\mathbb{R}$.

3.1. Exemple des séries généralisées. On prend un groupe abélien ordonné Γ, et on forme $K = \mathbb{R}((\Gamma)) = \mathbb{R}((t^\Gamma))$, les séries $a = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma t^\gamma$, avec support $\mathrm{Supp}(a) = \{\gamma \in \Gamma \mid a_\gamma\}$ bien ordonné. On a vu que c'est un anneau, et même un corps. Nous avions défini sur K une valuation, par $v(a) = \min \mathrm{Supp}(a)$. Il faut montrer que cette valuation coïncide avec la valuation standard. Pour cela, il faut supposer que K est ordonnable.
On regarde la série de Taylor associée à la fonction $f_n(x) = \sqrt{n^{-1} - x}$ au voisinage de zéro, pour $n > 0$; écrivons la $\sum_{i=0}^\infty b_i x^i$. Soit $a \in K$ avec $v(a) > 0$. Alors comme $\mathrm{Supp}(a) \subset \Gamma^{>0}$ est bien ordonné, on a que la série obtenue en développant formellement $\sum_{i=0}^\infty b_i a^i$ a un sens et appartient à K. Cela montre que pour tout ordre sur K, on aura que a est infinitésimal. Cela ne nous dit pas quel est l'ordre sur K; par exemple si $\Gamma = \mathbb{Z}$, alors t peut être positif ou négatif. Par contre si Γ contient $1/2$, alors t est positif, (mais on ne sait pas pour $t^{1/2}$). Si on décide que tous les t^γ sont positifs, alors les éléments positifs de K sont les séries a dont le coefficient de $t^{v(a)}$ est positif. La valuation standard sur K coïncide donc avec la valuation que nous avions définie auparavant.

3.2. On peut montrer que tout corps de la forme $k((t^\Gamma))$, muni de la valuation $v(a) = \min \mathrm{Supp}(a)$, est Hensélien. En fait, on peut montrer aussi qu'il n'a pas d'extension immédiate propre, i.e.: si L est un corps valué étendant (K, v), et $L \neq K$, alors ou bien le corps résiduel de L contient strictement k, ou bien le groupe de valeurs de L contient strictement Γ.
On peut aussi montrer que si Γ est divisible, alors $\mathbb{R}((t^\Gamma))$ est réel clos. Une façon de le voir

est de dire que $\mathbb{C}((t^\Gamma)) = K(i)$ n'a pas d'extension immédiate, et donc doit être algébriquement clos (puisque $\mathbb{C}$ n'a pas d'extension algebrique propre, et un groupe divisible ordonné ne peut être d'indice fini dans une extension ordonnée), et donc K est réel clos (cf Thm ?? du cours).

3.3. On considère $K := \mathbb{R}((t^\Gamma))$ comme ci-dessus, v la valuation standard. Soit $f = \sum_i b_i X^i \in \mathbb{R}[[X_1, \dots, X_m]]$ une série. Alors on peut montrer que si chaque élément du m-uplet a est dans $\mathcal{M}_v$, alors le développement formel de $\sum_{i=0}^\infty b_i a^i$ est bien défini et appartient à K. Cette série définit donc une application $\hat{f} : \mathcal{M}_v^m \to K$, qui prend ses valeurs dans $f(0) + \mathcal{M}_v$. La preuve de cela suit en fait de ce que avez/aurez montré dans le DM: le DM le montre pour $m = 1$; pour le cas général, on prend pour I la réunion des supports des a_i, qui est un ensemble bien ordonné et contenu dans $\Gamma^{>0}$, et on applique le résultat du DM.

3.4. Structure $\mathcal{L}_{an}$ sur $\mathbb{R}((t^\Gamma))$.
Soit $f \in \mathbb{R}\{X_1, \dots, X_m\}$ (séries qui convergent sur un voisinage de $[-1, 1]^m$). On définit une structure analytique sur $K := \mathbb{R}((t^\Gamma))$ de la façon suivante: tout élément a de $[-1, 1]_K^m$ s'écrit $b + \epsilon$, où $b \in [-1, 1]_\mathbb{R}$, et $\epsilon \in \mathcal{M}_v^m$. On regarde le développement de Taylor de f en b, $T_b(f)$, et on pose $\tilde{f}(a) = T_b(f)(\epsilon)$. Cela en fait un modèle de T_{an}.

Je vais maintenant dire quelques mots sur l'élimination des quantificateurs de T_{an}. Rappel:

Théorème 3.5. *(Van den Dries, Macintyre, Marker) La théorie* $T_{an} \cup \{\forall x (x = 0 \wedge 0^{-1} = 0) \vee (x \neq 0 \wedge x x^{-1} = 1)\}$ *admet l'élimination des quantificateurs dans le langage* $\mathcal{L}_{an} \cup \{^{-1}\}$.

Pour montrer ce résultat, ils utilisent (la preuve d')un résultat de Denef et van den Dries, qui mettent une structure analytique sur $[-1, 1]$ de la façon suivante:
Pour toute fonction $f \in \mathbb{R}\{X_1, \dots, X_m\}$ **qui prend ses valeurs dans** $[-1, 1]$, on ajoute un symbole $\bar{f}$ au langage, et on l'interprète par f. De cette façon on obtient un langage $\mathcal{L}'_{an}$. Notez que la multiplication est dans le langage, mais pas l'addition. On aura cependant la fonction $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2)/2$. L'axiomatisation de T_{an} a une généralisation à ce contexte, que je note T'_{an}. On ajoute à $\mathcal{L}'_{an}$ une fonction binaire D, interprétées par

$$D(x, y) = \begin{cases} x/y & \text{si } |x| \leq |y| \neq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 3.6. *(Denef, van den Dries)* $\mathrm{Th}([-1, 1])$ *dans le langage* $\mathcal{L}'_{an} \cup \{D\}$ *admet l'élimination des quantificateurs.*

La preuve du résultat de Denef et van den Dries est longue, et difficile. Elle contient quelques astuces, et utilise pas mal d'outils utiles en analyse (Théorèmes de Préparation et Division de Weierstrass par exemple). Il est assez clair que, étant donné un modèle K de T_{an}, on peut définir dans K la $\mathcal{L}'_{an}$-structure $[-1, 1]_K$, et qu'elle sera un modèle de T'_{an}. Réciproquement, en utilisant la fonction $\rho : x \mapsto x/\sqrt{1 + x^2}$, on arrive à interpréter la $\mathcal{L}_{an} \cup \{^{-1}\}$-structure $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$. Van den Dries, Macintyre et Marker remarquent alors que la preuve de Denef et van den Dries passe aux modèles de $T'_{an} \cup$ {axiome définissant D}. Et ils en déduisent leur résultat d'é.q. dans $\mathcal{L}_{an} \cup \{^{-1}\}$. (Cette dernière déduction consiste en des manipulations logiques, elle leur prend deux lignes, elle me prend deux pages). Le morceau difficile est donc la preuve de Denef-Van den Dries.